Universidade de Lisboa

Transformações geométricas dos gráficos de funções: um estudo no 10.º ano, com recurso à tecnologia

Marisa Martins Rosa

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira e coorientado pela

Professora Doutora Helena Maria da Encarnação Sezinando

2018

Este trabalho foi realizado no âmbito do Projeto *Technology Enhanced Learning at Future Teacher Education Lab* (contrato PTDC/MHC-CED/0588/2014), financiado por fundos nacionais através da Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT).

Resumo

Este estudo, realizado no âmbito da prática de ensino supervisionada, incidiu sobre a compreensão que os alunos de uma turma do 10.º ano revelam do tema Transformações geométricas dos gráficos de funções, com recurso ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra* e à calculadora gráfica. A lecionação da presente subunidade de ensino decorreu no Instituto de Ciências Educativas, durante o início do 3.º período, ao longo de 15 tempos de 45 minutos, assente na realização de tarefas exploratórias.

A metodologia utilizada ao longo deste estudo insere-se numa abordagem qualitativa de estudo de caso. Como métodos de recolha de dados, recorreu-se à observação das aulas, à recolha documental das produções escritas dos alunos e à realização de uma entrevista aos quatro alunos selecionados como participantes e que se constituíram como dois casos, uma vez que trabalharam a pares nas aulas.

A análise de dados mostra que as transformações geométricas de gráficos de funções é um tema que pode ser contraintuitivo para os alunos. Perante a transformação geométrica vertical do gráfico de uma função os alunos conseguem explicar as mudanças que ocorrem ao gráfico da função, tendo consciência das alterações que ocorrem de uma função para a outra, em particular no que se refere à expressão algébrica. No caso horizontal, os alunos tendem a revelar mais dificuldade ao estabelecerem a relação que existe entre a expressão algébrica da nova função e o gráfico associado à mesma que sofreu a transformação geométrica.

A tecnologia usada permitiu aos alunos refletirem sobre as ações que cada transformação produz em cada o gráfico e que aspetos se alterariam quando era criada uma nova função. A visualização, através do Geogebra e da calculadora gráfica, permitiu aos alunos terem consciência das mudanças que ocorriam graficamente, relacionando a componente gráfica e algébrica. Este aspeto foi bastante realçado pela utilização de tarefas exploratórias que fomentavam a conexão entre estas duas componentes.

Palavras-Chave: Transformações de gráficos, funções, calculadora gráfica, Geogebra.

Abstract

This study, carried out in the context of the supervised teaching practice, is focused on the understanding that 10th grade students show of geometric transformations of graphics of functions, using as a resource the dynamic geometry software *Geogebra* and the graphic calculator. The teaching of this subunit was developed at Instituto de Ciências Educativas, during the beginning of the 3rd term, for 15 lessons of 45 minutes, based on the work with exploratory tasks.

The methodology adopted in this study is a qualitative approach case study. The methods of data collection are classroom observations, documental collection of the students' written productions and an interview of four students selected as participants that were constituted as two cases studies, as they have worked in pairs in the classroom.

The data analysis shows that geometric transformations of graphics of functions is a theme that can be counterintuitive to the students. Facing the vertical geometrical transformation of the graph of a function, students can explain changes that occur to the function graph, having in mind changes from a function to another and, particularly those which respect to the algebraic expression of the new function. In the horizontal case, students tend to reveal more difficulty in establishing the relation between the algebraic expression of the new function and the graph associated that suffered the geometrical transformation.

The technology used allowed students to reflect about the actions that each transformation produces in each graph and which aspects would change when a new function is created. The visualization, through the *Geogebra* and the graphic calculator, enables students to be more aware of the changes that occurred graphically, comparing the algebraic and graphic components. This aspect was well revealed by the usage of exploratory tasks which promote the connection between both components.

Key Words: Transformations of graphic, functions, graphic calculator and Geogebra.

"É bom ensinar, desde que se pratique o que se ensina"

Santo Inácio de Antioquia

Agradecimentos

Primeiro que tudo, agradeço muito à minha família, aos meus pais e à minha irmã. À minha mãe e ao meu pai, Fátima e Martinho, que sempre lutaram para que, tanto eu como a minha irmã, tivéssemos a oportunidade de ter a melhor educação, tanto pessoal como académica. Obrigada por todo o apoio na realização deste sonho e, essencialmente, por me mostrarem com o vosso trabalho e dedicação que tudo é possível. À minha irmã, agradeço a preocupação para que terminasse este relatório e, acima de tudo, a alegria com que ficavas ao saberes que já estava quase. Obrigada Mariana!

À minha orientadora, Professora Doutora Hélia Oliveira, agradeço toda a dedicação e apoio. Obrigada por todo o testemunho que me passou enquanto professora que é e por tudo o que aprendi consigo nestes últimos dois anos. Como orientadora agradeço toda dedicação, principalmente naqueles momentos em que o tempo era pouco. Obrigada pela motivação e pelos conselhos, tanto nos bons momentos como nos menos bons.

De seguida, agradeço à Professora Doutora Helena Sezinando pela ajuda e apoio prestado. Obrigada pelas horas que gastou comigo a analisar pormenores importantes e que valorizam, sem dúvida, o trabalho realizado.

Aos meus professores que me acompanharam nestes últimos dois anos, à Professora Ana Henriques, ao Professor Henrique Guimarães e à Professora Leonor Santos, quero agradecer tudo aquilo que me ensinaram ao longo de todo o mestrado.

Ao professor Valter Carlos, agradeço enquanto meu professor e orientador. Enquanto sua aluna, agradeço toda a dedicação, esforço e ensinamentos. Como orientador, obrigada por me ter recebido, bem como por todo o apoio e conselhos que me foi dando ao longo deste último ano.

À Carina que sempre acompanhou de perto todo o meu trabalho e que sempre me apoiou em qualquer momento. Obrigada pela tua amizade e por toda a tua dedicação e, acima de tudo, por tudo o que aprendemos juntas. Foi maravilhoso poder partilhar contigo todas as experiências que este último ano proporcionaram.

Às minhas colegas do Mestrado, à Dulce, à Maria e à Carolina, quero agradecer tudo aquilo que aprendi convosco, através da partilha de experiências e de dificuldades. Foi bom termos crescido juntas!

Agradeço aos meus amigos, à Joana e ao MOER, por todo o apoio e presença em todas as fases da concretização deste sonho. Um grande obrigada por terem sonhado comigo e por ter tido a possibilidade de partilhar convosco cada etapa alcançada. Em especial, agradeço à Inês Rolim e à Joana Gonçalves que deram um pequeno Grande contributo a este trabalho.

A Ele, por tanto!

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

Índice de Anexos

Capítulo 1

Introdução

O primeiro capítulo deste trabalho é composto pela apresentação das motivações pessoais para o estudo que desenvolvo e do objetivo e questões que orientam o mesmo. De seguida, descrevo a organização deste trabalho.

1.1. Motivações

A Matemática foi uma disciplina que gradualmente, para mim enquanto aluna, se foi tornando desafiadora pela possibilidade de raciocínio lógico que advém da mesma e pela complexidade que representa. Enquanto aluna enfrentei algumas dificuldades associadas a esta disciplina que, mais tarde, foram colmatadas pela vontade de enfrentá-las e superá-las. Ao mesmo tempo, o raciocínio que era exigido em cada tarefa constituía uma forma de aprender mais e procurar respostas lógicas que fazem da matemática uma ciência exata.

Enquanto aluna fui-me apercebendo que mesmo com algumas dificuldades é possível ultrapassá-las e que o desenvolvimento do raciocínio lógico é importantíssimo, tanto para a Matemática como para as outras áreas. Por isto mesmo, e por ter consciência clara que esta disciplina torna-se problemática para a maioria dos alunos e que através da exploração eficaz das ideias matemáticas os alunos podem aprender e ser desafiados pela mesma, o ensino torna-se para mim um caminho que me faz transmitir o que experimentei enquanto aluna.

O tema das funções sempre foi para mim, enquanto aluna e explicadora, um tema que me fascinou bastante. Este é um tema que permite aos alunos estabelecer diversas relações com várias áreas tanto da matemática como das restantes disciplinas.

Estando a realizar a prática de ensino supervisionada numa turma de 10.º ano e tentando incorporar o tema das funções na minha intervenção letiva, escolhi, em conjunto com os meus orientadores, lecionar a subunidade relativa às transformações geométricas dos gráficos de funções. Sendo este um tema que se torna pouco explorado pela maioria dos alunos, devido ao tempo limitado que existe para lecionar esta subunidade, tornou-se para mim uma oportunidade de, perante a utilização da tecnologia e das tarefas exploratórias, levar os alunos a refletir sobre as consequências que, algebricamente, uma transformação acarreta.

1.2. Objetivos e questões do estudo

O presente relatório tem como base a experiência da prática de ensino supervisionada que ocorreu no âmbito da unidade curricular Iniciação à Prática profissional IV, do Mestrado em Ensino de Matemática. A minha intervenção letiva decorreu no Instituto de Ciências Educativas numa turma de 10.º ano de escolaridade, durante o ano letivo 2017/2018.

De forma a ir ao encontro das motivações apresentadas por mim, o objetivo deste estudo de cariz investigativo é analisar a compreensão que os alunos revelam das transformações geométricas dos gráficos de funções perante o uso da tecnologia e de tarefas exploratórias.

Assim sendo, considerei as três seguintes questões:

- Quais os significados que os alunos atribuem às diferentes transformações geométricas do gráfico de uma função?
- Como os alunos relacionam a transformação geométrica do gráfico com a expressão algébrica, no caso de gráficos obtidos por:
  - Translação?
  - Contração e dilatação?
  - Reflexão?
- Que dificuldades revelam os alunos nas transformações de gráficos de funções, ao longo da subunidade de ensino?

Este trabalho é também uma oportunidade para refletir sobre a prática de ensino no contexto da intervenção realizada, permitindo-me desta forma ponderar sobre os aspetos que, para mim enquanto futura professora, são importantes ter em conta ao longo da lecionação de uma aula.

1.3. Organização do relatório

Logo após este primeiro capítulo, referente à introdução, no segundo capítulo, é apresentado um enquadramento curricular e didático que orientou as opções didáticas da intervenção letiva. Neste capítulo é possível refletir, de forma geral, três ideias principais presentes neste relatório, a compreensão matemática, as transformações geométricas dos gráficos de funções e a tecnologia.

De seguida, o terceiro capítulo, referente à unidade de ensino, tem como objetivo apresentar uma caracterização de todo o contexto envolvido durante a lecionação. Deste modo, é apresentado uma breve caracterização da escola e da turma, seguindo-se de uma descrição dos conteúdos trabalhados durante as aulas, bem como os materiais utilizados e o tipo de avaliação utilizada. Por fim, é feita uma breve reflexão sobre cada aula lecionada.

No quarto capítulo, intitulado de métodos e procedimentos de recolha de dados, é feita uma abordagem às opções metodológicas definidas para o trabalho de natureza investigativa. Nesta secção é ainda feita uma descrição dos participantes do estudo e de todos os instrumentos utilizados ao longo da recolha de informação, assim como da forma como cada um foi utilizado.

O quinto capítulo, referente à análise de dados, procura descrever tudo o que foi observado por mim, enquanto professora e investigadora. De modo a poder dar resposta a cada uma das questões de investigação, procedi, neste capítulo, à descrição sucinta de toda a informação recolhida através dos instrumentos de recolha de dados.

Por último, o capítulo seis é dedicado às principais conclusões do estudo, recorrendo às questões de investigação colocadas. Neste capítulo é ainda feita uma reflexão final de todo o trabalho desenvolvido, tendo por base a intervenção letiva e a realização deste relatório.

Capítulo 2

Enquadramento curricular e didático

2.1. Aprender matemática com compreensão

A "compreensão" é vista pela investigação como um ideal que deve ser alcançado pelos alunos, visto ser um dos objetivos do aluno no processo de ensino e aprendizagem (Sierpinska,1990). No entanto, esta autora argumenta que a noção de compreensão é apresentada por diferentes autores através de diferentes pontos de vista. Tichomirov (1976) (citado por Sierpinska, 1990), fornece uma noção de compreensão através das teorias de Husserl e Bergson. Estes defendem que a compreensão é um ato mental que consiste numa "perceção direta da essência das coisas"(p. 25). Por outro lado, Van de Walle, Lovin, Karp e Williams (2014), afirmam que "compreensão é poder pensar e agir de forma flexível com um tópico ou conceito" (p. 1). A compreensão dos conceitos não pressupõe apenas um conhecimento da sua definição, mas sim perceber de que modo os diferentes conceitos se relacionam (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012).

Sierpinska (1990) referencia ainda Dilthey que afirma que compreender é uma experiência que deve ser tida em conta no contexto de teorias de interpretação humanística, nas quais é dada uma atribuição de sentido à atividade humana. Essa atribuição de sentido é, segundo Dilthey, obtida pela experiência da "compreensão". Este autor considera a compreensão como algo "puramente intuitivo e pré-conceitual"(1970, citado em Sierpinska, p.26) e que a compreensão não se baseia em estabelecer relações entre o fenómeno e o seu sentido, mas em compreender o fenómeno e o sentido conjuntamente.

Ao contrário deste último autor, Dewey (1988) (citado em Sierpinska, 1990), menciona que a compreensão não decorre de um ato intuitivo e pré-conceitual, mas sim de um processo de pensamento, que é o objetivo de todo o conhecimento. Para o autor entender o significado de objetos e situações consiste em descobrir que são "partes de um todo que os explica, esclarece e interpreta, conferindo-lhes significado" (p.26). Enquanto que Dilthey considera que a explicação se opõe à compreensão, Dewey defende que a explicação é um meio para entender.

Na conceção de interpretação, apresentada por Ricoeur (1989), (citado em Sierpinska, 1990), a compreensão e a explicação estão ainda mais próximas. Segundo este autor, existe um processo que envolve estas duas componentes. Primeiramente a compreensão é um entendimento absoluto do significado como um todo. De seguida, a compreensão é atingida através de procedimentos explicativos.

Assim sendo, o processo de compreensão inicia-se com uma intuição que deve ser justificada e validada. Enquanto ocorre o momento de validação, a intuição que foi tida inicialmente poderá ser "melhorada, alterada ou rejeitada" (Sierpinska, 1990, p. 26), havendo uma nova intuição que terá de ser justificada e validada. Este é um processo que engloba um ciclo que só termina quando a compreensão for alcançada (Sierpinska, 1990).

Um dos problemas centrais na psicologia prende-se com a forma como entendemos a informação que nos é transmitida através das nossas interações com outras pessoas (Sierpinska, 1990). Lindsay (1984, citado em Sierpinska, 1990) reflete sobre o "nível" de compreensão que cada pessoa alcança e que está inteiramente relacionado com o conhecimento que já temos acumulado em nós. Esta autora justifica estas ideias da seguinte forma:

> O desenvolvimento contínuo acumulado, guardado no nosso sistema de memória, influencia a forma como as novas informações são assimiladas. (…) O entendimento é alcançado, juntamente com a acumulação de propriedades de objetos, exemplos e desenvolvimento de conceitos. (…) Novos conceitos podem ser assimilados com base em analogias com o que já é conhecido." (Lindsay, 1984, citada em Sierpinska, 1990, p. 25)

Quando se verifica uma relação entre a incorporação do novo conceito com a informação que já é conhecida, existe uma interpretação e uma compreensão mais completa de novas situações (Lindsay, 1984 citada em Sierpinska, 1990). Esta autora realça que um adulto, quando confrontado com algo novo, relaciona-o sempre com a sua estrutura conceitual.

Van de Walle, Lovin, Karp e Bay-Wiliams (2014) vão ao encontro das ideias apresentadas anteriormente ao recorrem ao construtivismo para explicar como o individuo percebe e compreende. O construtivismo defende que os alunos são "os criadores da sua própria aprendizagem" (p. 4), e que a construção da compreensão exige ferramentas e esforços. Por um lado, as ferramentas são as ideias e conhecimentos que os alunos já têm. Por outro, os esforços dizem respeito a todo o pensamento reflexivo que permite ao aluno conectar ideias pré-existentes a novas informações, alterando o conhecimento existente até então. Estas conexões podem surgir por assimilação ou acomodação. No primeiro caso, o novo conceito é incorporado ao conhecimento já existente, permitindo a nova informação aumentar uma "rede mental existente" (p.5). A acomodação acontece quando o novo conceito não consegue ser incorporado ao conhecimento que já existe, criando-se um conflito cognitivo ou desequilíbrio. Ao tentar resolver este desequilíbrio, o cérebro modifica e troca o "esquema existente"(p.5) por um novo conceito que faça mais sentido.

Estes autores ilustram através de um esquema com linhas e círculos, a forma como alguém constrói uma ideia (figura 1). O círculo branco e os círculos a cinzento representam ideias e as linhas são as conexões que são estabelecidas entre essas ideias. O círculo branco é a informação nova que se pretende introduzir e os círculos a cinzento são as informações já existentes. Com esta figura, o autor pretende mostrar que as ideias ou informações novas são construídas através das ideias já existentes e que estas é que permitem dar significado à nova ideia.

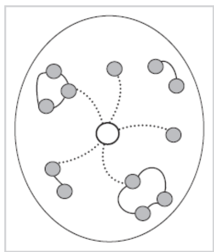


Figura 1 – A construção de uma ideia, (Van de Walle, Lovin, Karp e Bay-Williams, 2014, p.5)

Van de Walle, Lovin, Karp e Bay-Williams (2014) referem ainda que a compreensão ocorre ao longo de uma "linha" continua (figura 2) que começa na compreensão instrumental e termina na compreensão relacional. Quando ocorre compreensão instrumental, os conceitos e procedimentos são aprendidos de forma isolada, contribuindo para um esquecimento mais rápido, visto estes não serem entendidos e apenas memorizados. Por outro lado, a compreensão relacional pressupõe que o novo conceito é conectado às ideias existentes, verificando-se o estabelecimento de um conjunto de conexões. Esta compreensão poderá ser desenvolvida através do pensamento reflexivo de conhecimentos matemáticos que é proporcionado com a partilha de ideias e resultados que os alunos desenvolvem uns com os outros e com o professor (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay-Williams, 2014).

Figura 2 – O contínuo da compreensão (Van de Walle, Lovin, Karp & Bay-Williams, 2014, p. 5)

Na disciplina de matemática, segundo estes autores o principal objetivo deve ser ajudar os alunos a "desenvolver uma compreensão relacional das ideias matemáticas" (p.5), tornando-se esta mais complexa à medida que ocorrem mais "conexões entre ideias" (Van de Wall, Lovin Karp & Bay-Williams, p.5).

Além do construtivismo, a teoria sociocultural defendida por Vygotsky (1978, citado por Van de Walle, Lovin, Karp & Bay-Williams, 2014), realça a importância do apoio dos colegas e dos professores para a compreensão de certos conteúdos, principalmente aqueles que o aluno não consegue perceber sozinho.

2.2. A compreensão e a aprendizagem da matemática

A compreensão na disciplina de matemática pressupõe que os alunos sejam capazes de ser fluentes, característica que decorre da compreensão conceptual, do raciocínio estratégico e da resolução de problemas (NCTM, 2017). Martin (2009, citado em NCTM, 2017) defende que os alunos devem perceber qual o procedimento correto a utilizar em diferentes situações, tendo consciência do que cada procedimento faz e que tipo de respostas proporciona. Os alunos que compreendem os conceitos matemáticos conseguem perceber em que momento uma ideia matemática é útil e em que tipo de situações poderá ser utilizada. Estes organizam os seus conhecimentos num todo, permitindo-lhes aprender novos conceitos e estabelecer ideias com os conceitos que já são conhecidos pelos mesmos (Kilpatrick et al, 2001, citados em Mwakapenda, 2004).

Martin (2009, citado em NCTM, 2017) afirma que o conceito fluência pode ser definido como sendo algo que permite ao aluno ser capaz de "escolher com flexibilidade métodos e estratégias para resolver problemas de contexto e matemáticos" (p. 42) que foram entendidos, conseguindo explicar corretamente as respostas apresenta. Contudo, não se deve procurar levar o aluno a atingir a fluência rapidamente, pois isso levará à sua falta de interesse pela matemática (Ashcraft, 2002; Ramirez et al., 2013). A fluência vai sendo construída, primeiramente, através da exploração e da discussão de conceitos, havendo, mais tarde uma ênfase na utilização de estratégias de raciocínio que vão ao encontro dos significados e das propriedades das operações. Deste modo, é possível construir métodos gerais para a resolução de problemas (NCTM, 2017).

O *Council of Chief State School Officers* (2010, citado em Walle, Lovin, Karp & Bay-Williams, 2014) defende que a compreensão matemática é caracterizada pela capacidade do aluno conseguir justificar a veracidade ou não de uma resposta matemática, assim como, conseguir explicar a razão de certa regra fazer sentido De facto, na disciplina de matemática, a compreensão dos alunos dos conceitos matemáticos é uma preocupação constante (Mwakapenda, 2004). A compreensão conceitual é descrita como uma "componente crítica da capacidade matemática" (p.28) necessária para o sucesso na aprendizagem da Matemática (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, citados em Mwakapenda, 2004).

A partir de diversos pensadores, Sierpinska (1990), categoriza quatro atos de compreensão (*acts of understanding*, no original) de um conceito matemático, denominados por: *Identificação*, *Discriminação*, *Generalização e Síntese*.

A *identificação* é um ato no qual o individuo, perante um objeto ou conceito, verifica certas características que lhe permite agrupar num conjunto de conceitos ou objetos parecidos. A impressão sensorial é vista como um elemento fundamental nesta fase, estando os conceitos associados a esta mesma impressão. O objeto ou conceito é, de seguida, analisada segundo as suas características próprias, havendo assim uma *discriminação*. Numa fase em que o conceito é percebido, recorre-se à *generalização* que possibilita estender o conceito a outras aplicações. Por fim, a *síntese* integra todas as propriedades do conceito, organizando-as num todo.

De acordo com o documento do *Nacional Curriculum Statement Grade R-9* (2002, citada em Mwakapenda, 2014), é importante a complementaridade entre as ideias e os conceitos matemáticos, de modo a criar-se uma "estrutura coerente" (p. 28). O ensino e aprendizagem da matemática devem contribuir para que os alunos consigam compreender conceitos matemáticos profundos de modo a conseguirem "dar sentido à matemática" (p. 28). Assim sendo, é fundamental ter em conta a forma como os alunos organizam o conhecimento relativo aos conceitos matemáticos, para se poder perceber como estes entendem esses mesmos conceitos.

Fuson e Beckmann (2012) reconhecem a importância das representações escritas e como é importante variar essas mesmas representações para uma maior compreensão por parte dos alunos. A compreensão deverá sempre estabelecer relação com a explicação e a visualização, para que seja possível chegar à fluência procedimental.

Assim sendo, os alunos deverão tomar contacto com tarefas que permitam a utilização do raciocínio e de estratégias e procedimentos, de modo a consolidarem o conhecimento e assim, ganharem fluência. As tarefas que levem o aluno a justificar o seu entendimento e as capacidades matemáticas proporcionam evidências mais claras sobre a compreensão dos alunos (NCTM, 2017).

Por tudo o que foi refletido anteriormente, a compreensão é uma componente importante na aprendizagem da matemática e, por isso mesmo ao longo da minha intervenção letiva procurei promover a compreensão dos alunos dos conceitos associados ao tópico de transformações geométricas de gráficos de funções.

2.3. Transformações geométricas de gráficos de funções

As transformações geométricas de gráficos de funções lecionadas no 10.º ano são consideradas, pela investigação, como importantes para a aprendizagem do aluno na disciplina da Matemática (NCTM, 1989, 2000 citado em Anabousy, Daher & Baya'a, 2014). Segundo Lage e Gaisman (2016) citado em Daher e Anabousy (2015), este tópico é fundamental para aprendizagem da matemática na medida em que possibilita a compreensão de outros conceitos, nomeadamente as funções. Smith (2009) vai ao encontro da ideia apresentada anteriormente, constatando que as transformações geométricas de gráficos de funções poderão ajudar os alunos a aprender conceitos matemáticos mais difíceis e a perceber o comportamento de cada função.

Faulkenberry e Faulkenberry (2011) defendem a necessidade de os alunos focarem-se essencialmente nos conceitos subjacentes a fim de estes perceberem como os diferentes procedimentos envolvidos em cada transformação funcionam. Os conceitos subjacentes referidos por estes autores são as noções que permitem o aluno perceber como funciona cada transformação.

O ensino das transformações tem sido baseado na aprendizagem mecânica de regras algébricas (Borba & Confrey, 1996). A utilização de regras e procedimentos a aplicar nas diferentes transformações é algo com que Faulkenberry e Faulkenberry (2011) não concordam. Estes autores defendem que é necessário que os alunos percebam o que acontece, o efeito que é produzido no gráfico da função sempre que há uma transformação, sabendo, por exemplo, relacionar o conjunto de partida e o conjunto de chegada da função associada ao gráfico transformado. Também Anabousy, Daher & Baya'a (2015) consideram fundamental não insistir num ensino de aplicação de regras e sim num ensino que coloque os alunos a pensarem e a explorarem por si próprios essas transformações, sendo eles a descobrir por si as suas propriedades subjacentes. Zazkis, Liljedahl e Gadowsky (2003) afirmam que tais regras orientam o aluno para a memorização e não para a explicação, comprometendo "a consistência da estrutura matemática" (p. 444). Muitas vezes são orientados de modo a "fazerem a operação oposta quando a mudança está dentro do parêntesis". Esta forma de abordar o presente assunto torna-se pouco eficaz na medida em que o objetivo da matemática é levar os alunos a raciocinar (Faulkenberry & Faulkenberry, 2010, p. 30). A verdade é que pelo facto de o ensino estar orientado para esta forma de pensar, os alunos estão constantemente mais preocupados em aplicar as regras do que em perceber o comportamento da função (Zazkis, Liljedahl & Gadowsky, 2003). Harel, et al. (2008) afirmam que "a álgebra abstrata exige que os alunos pensem no significado da situação dada numa tarefa em vez de recordar um procedimento memorizado e desconectado" (citado em Taylor, 2013, p. 19).

Consciência e Oliveira (2011) reforçam, através de alguns autores, que os conceitos matemáticos se relacionam com as suas representações, tornando-se difícil compreender o conceito de função sem recorrer a diversas representações, pois cada representação fornece aspetos particulares que são necessários para a compreensão de função. As representações são importantes no processo de ensino e aprendizagem e no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio matemático (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). O NCTM (2007, citado em Gafanhoto e Canavarro, 2011) enumeram um conjunto de situações em que as representações são elementos fundamentais. Isto é, as representações são essenciais em compreender os conceitos e as relações matemáticas, em comunicar conhecimentos matemáticos, em explicar raciocínios, em estabelecer relações entre conceitos matemáticos que estejam relacionados e na modelação de problemas que exigiam a aplicação da matemática.

Durante a intervenção letiva, a representação algébrica, gráfica, verbal, numérica e tabular esteve presente. Ao trabalharem com diferentes representações, os alunos adquirem a capacidade de transferir a informação de uma representação para outra, "estabelecendo desta forma relações entre as diferentes ideias matemáticas" (NCTM, 2007 citado em Gafanhoto & Canavarro, 2011, p. 129), desenvolvendo uma "compreensão profunda do conceito" (Saraiva, Teixeira & Andrade, 2010, p. 3). Além disso, a relação entre as várias representações que vão sendo estabelecidas permitem, ao aluno, uma maior compreensão do conceito (Goldin & Shteingold, 2001 citados em Gafanhoto & Canavarro, 2011).

A representação tabular, mencionada por Brown e Mehilos (2010, citados em Gafanhoto & Canavarro, 2011), é tida como importante na medida em que ajuda os alunos a "passar do mundo concreto…para o mundo abstrato da álgebra, onde as quantidades variam"(p.131). Ao mesmo tempo, as tabelas permitem ajudar o aluno a dar significado às expressões algébricas e a variáveis, contribuindo para desenvolver uma "melhor compreensão de símbolos abstratos" (p. 132). É de realçar também a importância da relação entre a representação algébrica e gráfica que trazem "benefícios para a compreensão" dos alunos (Saraiva, Teixeira & Andrade, 2010, p.3).

2.3.1. Dificuldades

A dependência que os alunos manifestam quanto à utilização de regras também é fruto da falta de compreensão conceitual das transformações no campo das funções (Daher & Anabousy, 2015). De facto, existem estudos que comprovam que a aprendizagem do conceito de função é muito complexo, mesmo para alunos que frequentem níveis mais avançados, verificando-se que estes possuem um entendimento débil de função (Oerhtman et al.,2008 citado em Smith, 2009). Por seu turno, Zazkis, Liljedahl e Gadowsky (2003) associam a dificuldade dos alunos à "tendência humana para reduzir o nível de abstração" (p.445) quando confrontados com situações mais complexas.

O conceito de função poderá ser percebido de duas maneiras, como processo e como objeto (Sfard, 1991 citado em Consciência & Oliveira, 2011). Contudo Slavit (1997, citado em Consciência e Oliveira, 2011), considera ser complicado para o aluno compreender as transformações no campo das funções se a função não for vista como um objeto. Importa realçar que neste tópico, os gráficos de funções são objetos matemáticos, sendo necessário tratar as funções como objetos (Sever & Yerushalmy, 2007). Smith (2009) afirma que alguns alunos não possuem a estrutura conceitual que lhes permite relacionar os valores do conjunto de partida que vão sendo constantemente modificadas ao mesmo tempo que os valores do conjunto de chegada. Este autor defende que ao utilizarmos um raciocínio no qual os alunos relacionam os dois conjuntos, estes são capazes de transformar os objetos e raciocinar sobre os valores de vários parâmetros que vão sendo continuamente alterados (Smith, 2009).

Assim sendo, as dificuldades dos alunos em relação às transformações de funções estão relacionadas com a dificuldade em compreender o conceito de função (Baker, Hemenway & Trigueros, 2000; Lage & Gaisman, 2006 citados em Anabousy, Daher & Baya'a, 2014). Um pré-requisito importante para a compreensão de transformações de funções é o aluno ter uma conceção de função clara (Baker, Hemenway & Trigueros, 2001; Zazkis, Liljedahl, Gadowsky, 2003).

Anabousy, Daher e Baya'a (2014) realçam ainda a importância do envolvimento dos alunos com a representação algébrica, gráfica e verbal de uma função. Os alunos revelam muitas dificuldades nesta última representação devido ao facto de estes terem de se expressar, principalmente quando lhes é pedido para representarem verbalmente as transformações apresentadas graficamente. Estas dificuldades dos alunos quanto à representação verbal são apontadas por estes últimos autores, como uma incapacidade de conseguirem transferir o seu conhecimento sobre transformações de funções num contexto gráfico ou algébrico para transformações de funções que envolvam o contexto real. Contudo, a representação gráfica representa também uma dificuldade para os alunos, na medida em que estes revelam problemas em identificar as propriedades das funções perante esta representação (Lage e Gaisman, 2006 citado em Anabousy, Daher & Baya'a, 2014). Consciência e Oliveira (2011) defendem que o uso de tarefas de exploração com foco numa representação verbal diminui as dificuldades dos alunos com esta mesma representação, levando os alunos a perceber o conceito de transformações.

Relativamente às transformações geométricas possíveis de realizar nas funções, as translações horizontais são as que se tornam mais complicadas para os alunos, na medida em que não acompanham a intuição do aluno. Eisenberg e Dreyfus (1994, citados em Anabousy, Daher & Baya'a, 2014) identificam esta dificuldade pelo facto da translação horizontal, em comparação com a translação vertical, envolver um processamento mais visual.

Perante uma representação gráfica os alunos tendem a mostrar dificuldade em reconhecer as transformações horizontais, estando estas a ser exibidas individualmente em conjunto com outras transformações (Smith, 2009). Segundo Zazkis, Liljedahl e Gadowsky (2003) os alunos tendem a ter mais dificuldade com a translação horizontal de uma parábola, sendo esta contraintuitiva para os alunos.

Zazkis, Liljedahl, Gadowsky (2003) realizaram um estudo com um aluno, no qual este trabalhou com transformações de funções utilizando uma calculadora gráfica. Durante a realização de uma entrevista a este aluno, foi possível constatar a utilização de regras que vão contra a expectativa do mesmo. Este afirma que quando se fazem modificações dentro do parêntesis, a transformação faz-se de forma contrária relativamente ao sinal que está escrito dentro desse parêntesis. Estes autores afirmam que, no geral, os alunos "aceitam a inconsistência percebida sem entender a sua origem" (p.441), não havendo uma vontade de perceber ou explicar o porquê de acontecer assim quando estamos perante as transformações horizontais. É ainda importante realçar que, segundo a investigação, os alunos mostram alguma resistência em não abandonar as suas crenças intuitivas, levando estes a possuir conceções diferentes relativamente às transformações de funções, nomeadamente as translações horizontais (Fischbein, 1987, citado em Zazkis, Liljedahl & Gadowsky, 2003).

Também são identificadas dificuldades relativamente à reflexão de funções cúbicas. Esta é uma dificuldade que provém do facto das funções cúbicas que são transformadas por meio de uma reflexão, relativamente ao eixo das ordenadas serem muito parecidas com a sua função inicial, sendo difícil para o aluno identificar perante uma representação gráfica a função transformada que é resultado da reflexão aplicada à função inicial (Anabousy, Daher & Baya'a, 2015). Esta dificuldade poderá ser atribuída à complexidade da construção mental que é necessária para processar a imagem refletida do gráfico da função cúbica, sendo esta complexidade consequência da dificuldade em perceber a transformação horizontal (Baker, Hemenway & Trigueros, 2000 citados em Anabousy, Daher & Baya'a, 2015).

2.3.2. Tecnologia

Na matemática a utilização do software representa uma orientação curricular fundamental, podendo esta ser vista como uma contribuição para a "compreensão dos conceitos, a exploração de diversas representações e de as relacionar, a investigação de propriedades e de relações matemáticas, os processos de natureza indutiva e experimental, a generalização e os processos argumentativos e a modelação, entre outros" (Oliveira & Domingos, 2008, p. 269).

Perante as dificuldades que os alunos revelam tanto sobre funções como transformações das mesmas, a investigação tem procurado formas que possam ajudar o aluno a aprender de um modo mais sólido as diferentes transformações geométricas possíveis de ocorrer sobre uma função. Desta forma, a tecnologia é uma das formas que a investigação considera ser benéfica para a aprendizagem deste tópico.

Segundo Taylor (2013), a linguagem visual representa uma abordagem poderosa para expressar conceitos matemáticos. A aprendizagem visual inclui um conjunto de capacidades, tais como a observação, reconhecimento, interpretação, perceção e comunicação (Murphy, 2009 citado em Taylor, 2013). Com estas capacidades o aluno é capaz de entender o conceito de função e de transformação de função: - "É o processo de criação de imagens mentais ou modelos de um conceito que os alunos são capazes de fazer o salto importante para passar do concreto para o abstrato" (Murphy, 2009 citado em Taylor, 2013, p. 21). Torna-se mais fácil para o aluno, através da visualização, representar uma função algebricamente. As capacidades gráficas da tecnologia permitem a criação de múltiplas representações (Gafanhoto & Canavarro, 2011). Como diz Borba & Confrey (1996) "o ênfase na visualização…permite que os alunos se movam para o simbolismo algébrico…". No entanto, a visualização das representações gráficas deve ser trabalhada juntamente com as abordagens analíticas, de modo a motivar e enriquecer a compreensão (DGE, s.d.).

A utilização da tecnologia deve ser utilizada para ajudar os alunos a compreender determinados conteúdos, bem como estabelecer relações matemáticas, sendo que a sua utilização deve ser feita segundo determinados critérios e que não comprometa a aprendizagem dos alunos (MEC, 2014). Ao longo da minha intervenção os alunos terão acesso a duas ferramentas tecnológicas: a calculadora gráfica e o software de natureza dinâmica, o Geogebra.

Por um lado, a calculadora gráfica é, no geral, uma ferramenta que os alunos já possuem e que utilizam regularmente. Segundo o Programa de Matemática que está em vigor (MEC, 2014) a calculadora gráfica pode ser utilizada em sala de aula. Esta ferramenta tecnológica possibilita aos alunos visualizar o gráfico das funções que estão a ser trabalhadas e ter um contacto maior com variadas representações matemáticas. Segundo Consciência e Oliveira (2011), esta ferramenta tem a capacidade de combinar múltiplas representações de funções como é o caso das representações numéricas, gráficas e simbólicas. Contudo a esta ferramenta deve ser bem enquadrada e trabalhada em contextos escolhidos adequadamente, como é o caso das propriedades de gráficos de funções (DGE, s.d.). Importa salientar que é necessário que os alunos conheçam propriedades analíticas das funções, de modo a analisar situações mais concretas na calculadora gráfica (MEC, 2014).

Por outro lado, o Geogebra é justamente uma das ferramentas que poderá ajudar o aluno a visualizar e a raciocinar sobre transformações de funções, assim como aceder a diferentes representações, como é o caso, da representação gráfica e algébrica. Esta ferramenta também permite ao aluno ilustrar objetos matemáticos e tomar consciência das várias representações matemáticas (Anabousy & Daher,2015). De facto, o Geogebra permite trabalhar com diferentes representações, nomeadamente, as representações algébricas e gráficas, podendo favorecer a compreensão das transformações geométricas (Anabousy, Daher & Baya'a, 2014).

No entanto, o Geogebra apenas engloba as representações gráficas e algébricas, tornando-se um obstáculo para os alunos a ausência de representação verbal nesta ferramenta. Os alunos acabam por se concentrar nestas duas representações e não procuram justificar as diferentes transformações que vão ocorrendo nos gráficos das diferentes funções. A indisponibilidade desta representação na ferramenta tecnológica juntamente com a incapacidade de os alunos conseguirem transferir o seu conhecimento sobre as transformações de função num contexto algébrico ou gráfico para o contexto verbal são fatores que levam a uma dificuldade maior por parte dos alunos ao tentarem utilizar a representação verbal (Anabousy, Daher & Baya'a, 2014). Gafanhoto e Canavarro (2011) defendem que o software de geometria dinâmica, o Geogebra, é uma ferramenta que possibilita ao aluno compreender a matemática e proporciona a exploração de conceitos matemáticos complexos e a possibilidade de executar procedimentos de forma mais rápida, permitindo que mesmo tenha mais tempo para o raciocínio e reflexão (NCTM, 2007 citado em Gafanhoto e Canavarro, 2011).

Este tipo de software permite aceder a um ambiente no qual os alunos podem desenvolver e explorar diversas ideias relacionadas, segundo Assets e Pitfalls (citados em Taylor, 2013) tornando o aluno um participante ativo ao utilizar a tecnologia (Taylor, 2013). Segundo um estudo realizado por Anabousy, Daher e Baya'a (2014), depois de seis aulas, em que foi utilizado o Geogebra, os alunos foram capazes de aumentar a capacidade de visualizar as diferentes transformações geométricas de funções, e conseguiram realizar com sucesso tarefas que envolviam transformações.

O Geogebra dispõe também de uma ferramenta que possibilita arrastar os diversos pontos (um seletor). Através desta funcionalidade, os alunos poderão explorar a variação de parâmetros e explorar diversas ideias matemáticas no contexto das funções (Taylor, 2013). Além disso, ainda têm a oportunidade de observar as diferentes transformações que vão ocorrendo à função inicial, podendo perceber o comportamento das funções.

No entanto, a utilização do Geogebra só se torna produtivo se for acompanhado por tarefas adequadas que se tornam um contributo positivo para a aprendizagem dos alunos (Bishop, 1993; Nunes, 1993 citados em Anabousy, Daher & Baya'a, 2014). Os alunos conseguem realizar as aprendizagens pretendidas sobre transformações gráficas, ao trabalharem com uma ferramenta tecnológica dinâmica e, ao mesmo tempo, com tarefas de natureza exploratória com base nas quais investigam por si mesmos as propriedades envolvidas (Anabousy, Daher & Baya'a, 2014). Anabousy e Daher (2014) reforçam a importância das tarefas de exploração, que aliadas à utilização do Geogebra permitem incentivar os alunos a descobrir as propriedades das transformações, bem como a estabelecer relações entre cada uma delas.

Capítulo 3

Unidade de ensino

3.1. Contexto escolar

3.1.1. A escola

O Instituto de Ciências Educativas é uma escola privada do grupo Pedago situada na Ramada, no concelho de Odivelas. Esta foi fundada em 1984 e dispõe de turmas do ensino básico (2º e 3º ciclos) e do ensino secundário. O ICE conta com 36 docentes, maioritariamente do sexo feminino, e uma psicóloga que apoia os alunos a vários níveis, nomeadamente vocacional, profissional, psicológico, psicopedagógico e desenvolvimento pessoal.

Alguns alunos desta escola são residentes na Ramada, mas a maior parte reside noutras localidades do concelho de Odivelas. A maioria dos alunos são de nacionalidade portuguesa, no entanto alguns são oriundos do estrangeiro.

De acordo com a informação disponibilizada na página do ICE (http://www.ice.edu.pt), uma das grandes linhas orientadoras descritas pelo ICE é a formação de jovens para o século XXI. Esta linha orientadora tem como objetivo preparar os alunos para enfrentar tanto o espaço europeu como mundial. Esta escola pretende ainda "despertar aos alunos o gosto em aprender, estimulando a criatividade e desenvolvendo o pensamento crítico e a capacidade de intervir socialmente de forma responsável, contribuindo desta forma para uma cidadania ativa".

O Projeto Educativo do ICE indica que esta escola pretende educar e consciencializar os alunos para o conhecimento científico e para o desenvolvimento de uma cidadania consciente que visa a preparação para os desafios da sociedade. Relativamente ao conhecimento científico, o ICE procurou interagir a ciência, a tecnologia e a sociedade, analisando o impacto que estas têm no ambiente. Desta forma, a escola promove hábitos e preocupações relacionados com o preservar e conservar os recursos utilizados, recorrendo-se à reciclagem e reutilização. Ao longo deste ano letivo, alguns alunos do 2.º ciclo participaram no concurso “Separa e ganha embalagens”, tendo o ICE ganho o segundo lugar deste concurso.

Ainda incluído na promoção do conhecimento científico, o Plano Nacional de Literatura implementado na escola pretendeu preparar os alunos para alcançarem níveis de leitura que lhes permitissem lidarem com a escrita em qualquer situação, envolvendo atividades ligadas às Línguas, Literatura, Teatro, Fotografia e Música.

A Educação para a Saúde promovida pelo ICE através da integração da educação a nível alimentar, físico e pessoal, procura consciencializar os alunos para comportamentos saudáveis. Por fim, e de forma a combater o abandono e o insucesso escolar, o ICE criou o Desporto Escolar que permite partilhar experiências com diversas associações de desporto e escolas direcionadas para o desporto.

3.1.2. A Turma

A turma que acompanhei durante o ano letivo 2017/2018, onde desenvolvi a minha intervenção letiva é uma turma de 10º ano do curso de Ciências e Tecnologias. Esta é composta por 15 alunos, 8 raparigas e 7 rapazes. A idade dos alunos está compreendida entre os 14 e os 17 anos, havendo um aluno que estava a repetir o 10.º ano.

No geral, a turma tem um bom comportamento, mas os alunos são pouco participativos e um pouco faladores. Esta turma é considerada pelo conselho de turma como sendo muito heterogénea em relação aos desempenhos de várias disciplinas que são influenciados pela falta de confiança e ansiedade. Ao longo do ano, nas várias disciplinas, tentou-se incentivar os alunos a organizarem e planificarem os seus instrumentos de estudo, ajudando-os a tomar consciência da responsabilidade no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem. Desta forma, pretendeu-se que os alunos desenvolvessem certas capacidades tais como, a autonomia, o espírito crítico e o interesse pelas diferentes disciplinas.

Para ir ao encontro de tentar perceber as preferências que os alunos revelavam relativamente às diferentes disciplinas, elaborei um questionário no qual obtive as seguintes respostas, descritas na figura 3.

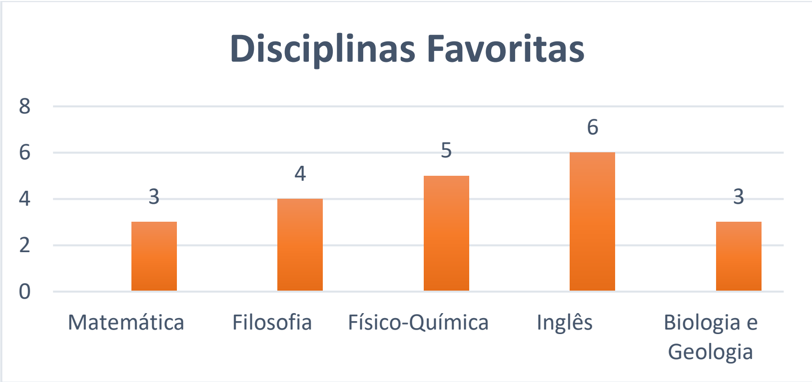


Figura 3 – Disciplinas favoritas dos alunos

Na Matemática, a maioria dos alunos apresenta muitas dificuldades em temas abordados em anos anteriores, verificando-se também algumas dificuldades em adquirir aprendizagens esperadas para o 10.º ano. A Figura 4 mostra, de forma geral, os níveis de desempenho dos alunos ao longo dos três períodos na disciplina de Matemática. O "Desempenho Negativo" corresponde às classificações abaixo de 10 valores, o "Desempenho Satisfatório" diz respeito às que se encontram entre os 10 valores e os 13 valores, o "Desempenho Bom" às classificações entre os 14 e os 17 valores e, por fim, o "Desempenho Muito Bom" engloba as classificações que estão compreendidas entre os 18 e 20 valores.

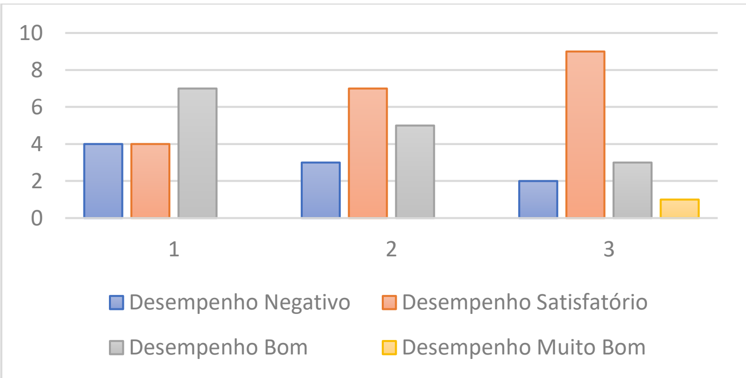


Figura 4 – Níveis de desempenho dos alunos

Analisando a figura 4, é possível verificar-se que ocorreu uma evolução positiva no que diz respeito ao Desempenho Satisfatório dos alunos, traduzindo-se o mesmo na descida de número de negativas que se verifica do 1º Período para o 3º Período. No 1º Período registaram-se quatro negativas, descendo para três no 2º Período e tendo terminado o 3º Período com duas negativas. Apesar desta evolução positiva, não se verificou o mesmo para o Desempenho Bom, verificando-se uma descida no número de alunos que conseguiram atingir notas acima a partir dos 14 valores. No final do 3º Período apenas um aluno alcançou o nível mais alto, obtendo a classificação de 18 valores.

3.2. Ancoragem e organização da subunidade de ensino

A subunidade de ensino lecionada por mim ao longo da minha intervenção intitula-se "Propriedades geométricas dos gráficos de funções". Esta encontra-se incluída no tema "Generalidades acerca de funções reais de variável real" para o 10.º ano de escolaridade (MEC, 2014).

Segundo os Programas e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (MEC, 2014) que estão em vigor, esta subunidade de ensino tem lugar logo a seguir ao tópico sobre a função inversa de uma função bijetiva. Contudo, na planificação anual da disciplina de Matemática A elaborada pelos professores que lecionam esta disciplina optou-se por estudar o tópico "Monotonia, extremos e concavidades", logo a seguir ao estudo da função inversa e antes de ser feito o estudo do tópico "Propriedades geométricas de gráficos de funções".

Esta subunidade de ensino inclui as transformações *translação, contração, dilatação* e *reflexão,* assim como o estudo das funções pares e ímpares. A paridade das funções é, segundo a planificação da escola, abordada antes de se iniciar o estudo das transformações. No entanto, este assunto foi lecionado por mim depois de ter sido introduzida a transformação *reflexão,* dado ambos os assuntos estarem interligados.

O Programa de Matemática A do Ensino Secundário tem como orientação que no estudo das propriedades geométricas dos gráficos de funções seja estabelecida a relação entre a representação gráfica e algébrica (MEC, 2014), isto é, que seja introduzida a relação do gráfico de uma função f com os gráficos das funções $af(x), f(bx), f(x+c), f(x)+d$, sendo a, b, c, d números reais não nulos. Importa realçar que este tema pressupõe um reconhecimento das transformações geométricas associadas às expressões analíticas referidas. Focou-se na exploração das consequências nos elementos caracterizadores de uma função (expressão analítica, domínio e contradomínio) por ação de transformações do gráfico da mesma e na exploração geométrica tendo em conta pontos fundamentais, tais como zeros e extremos. Foi dado especial ênfase às transformações *contração* e *dilatação* devido à sua complexidade.

No que diz respeito ao estudo da paridade de uma função, os programas e metas curriculares de Matemática A do Ensino Secundário destacam também a relação entre a representação algébrica e gráfica.

Para o estudo desta subunidade é essencial que os alunos tenham alguns conhecimentos prévios necessários à exploração deste tópico, nomeadamente as isometrias estudadas durante o 8.º ano de escolaridade. Segundo o Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário, este é um tópico trabalhado dentro do domínio "Vetores, translações e isometrias". Este envolve a noção de vetor, aspeto que voltou a ser estudado no presente ano letivo, de translação como isometria e reflexão como isometria (MEC, 2014).

A minha intervenção decorreu durante o 3.º Período tendo sido constituída por oito aulas de 90 minutos e uma aula de 45 minutos, terminando com a oitava aula que foi essencialmente destinada à realização da ficha de avaliação sumativa. No quadro 1 é possível verificar a planificação geral desta subunidade de ensino, tendo em conta os objetivos que eram esperados.

Quadro 1 – Plano da subunidade de ensino lecionada

Aula	**Tópicos**	**Objetivos**	**Materiais**
Aula 1 Dia 23 de Abril (90 m)	-Translação vertical e horizontal	-Representar, no Geogebra, o gráfico de uma função e o seu transformado por meio de uma translação; -Identificar o domínio, o contradomínio e as coordenadas dos pontos extremos e zeros de uma função e da função obtida, por meio de uma translação do seu gráfico; -Reconhecer que o gráfico da função g definida por $g(x) = f(x - c)$ é a imagem do gráfico de f pela translação de vetor $\vec{u} = (c, 0), sendo\ c$ um número real e f uma função real de variável real; -Reconhecer que no caso da translação vertical, em que $g(x) = f(x) + c,$ o gráfico de g é a imagem do gráfico de f pela translação segundo o vetor $\vec{u} = (0, c)$, o $D_g = D_f$; -Dado um gráfico e o seu transformado reconhecer se ocorreu uma translação vertical ou horizontal.	- Ficha de Trabalho n.º1 - Guião Geogebra - Software Geogebra
Aula 2		-Representar, na calculadora gráfica, o gráfico de uma função;	

Dia 24 de abril (90 m)	-Translação vertical e horizontal -Contração e dilatação vertical e horizontal	-Representar, no Geogebra, o gráfico de uma função; -Identificar o domínio e o contradomínio e as coordenadas dos pontos extremos e os zeros de uma função e da função obtida por translação do gráfico da função original; -Aplicação de conhecimentos sobre a translação horizontal e vertical em exercícios com recurso à calculadora gráfica. -Reconhecer que o gráfico de $g(x) = af(x)$, com $0 < a < 1$ e f função $r.v.r$ é a imagem do gráfico de f pela contração vertical; -Reconhecer que o gráfico de $g(x) = af(x)$, com $a > 1$ e f função $r.v.r$ é a imagem do gráfico de f pela dilatação vertical;	-Ficha de Trabalho n.º 2 -Ficha de Trabalho n.º 3 -Calculadora gráfica -Software Geogebra
Aula 3 Dia 26 de abril (90 m)	- Contração e dilatação vertical e horizontal	-Representar, na calculadora gráfica, o gráfico de uma função; -Representar, no Geogebra, o gráfico de uma função; -Reconhecer os gráficos obtidos por contração e dilatação horizontal e vertical; -Consolidação dos conteúdos sobre a contração e dilatação vertical; -Reconhecer que o gráfico de $g(x) = f(ax)$, com $0 < a < 1$ e f função $r.v.r$ é a imagem do gráfico de f pela dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$; -Reconhecer que o gráfico de $g(x) = f(ax)$, com $a > 1$ e f função $r.v.r$ é a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$; -Aplicação de conhecimentos sobre a contração e dilatação vertical e horizontal em exercícios com a calculadora gráfica.	- Ficha de Trabalho n.º 3 - Ficha de Trabalho n.º 4 -Calculadora gráfica -Software Geogebra
Aula 4 Dia 30 de abril (90 m)	- Reflexão	-Representar, o gráfico de uma função na calculadora gráfica; -Reconhecer que o gráfico da função $g(x) = -f(x)$, definido em $D_g = D_f$, é imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo O_x; -Reconhecer que o gráfico da função $g(x) = f(-x)$, definido em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$, é imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo O_y;	-Ficha de Trabalho n.º 5 -Software Geogebra
Aula 5 Dia 3 de maio (90 m)	- Função par - Função ímpar	-Identificar uma função real de variável real f como sendo par se $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$; -Identificar uma função real de variável real f com sendo ímpar se $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$; -Dada f ímpar, função real de variável real, justificar que se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$;	- Ficha de Trabalho n.º 6 - Calculadora gráfica

		-Reconhecer que uma função é ímpar se e só se o respetivo gráfico cartesiano for simétrico relativamente à origem do referencial; -Reconhecer que uma função é par se e só se o respetivo gráfico for simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.	
Aula 6 Dia 4 de maio (45 m)	- Reflexão -Função par -Função ímpar	-Consolidação e aplicação de conhecimentos em exercícios relativos a reflexões e a funções pares e ímpares.	-Ficha de Trabalho n.º 7
Aula 7 Dia 7 de maio (90 m)	-Translação vertical e horizontal -Contração de dilatação vertical e horizontal -Reflexão Função par - Função ímpar	-Consolidação dos conteúdos trabalhados na temática “transformações geométricas de gráficos de funções”; -Aplicação de conhecimentos em exercícios relativos às várias transformações geométricas de gráficos de funções: translação vertical e horizontal, contração e dilatação vertical e horizontal, reflexão; -Consolidação do conteúdo função par e ímpar; -Aplicação de conhecimentos em exercícios relativos à função par e ímpar. -Revisões para a ficha de avaliação.	- Exercícios do Manual “Novo Espaço”
Aula 8 Dia 8 de Maio (90 m)	-Transformações geométricas dos gráficos de funções; -Função par -Função ímpar	-Realização da ficha de avaliação sumativa.	-Ficha de avaliação

3.3. Conceitos fundamentais da unidade de ensino

Tal como mencionado anteriormente, a sistematização das ideias apresentadas foi feita em formato *powerpoint*. Para a elaboração das presentes ideias, recorri ao manual escolar Máximo (2017).

Seguidamente, apresento os conteúdos matemáticos relativos às transformações geométricas dos gráficos de funções utilizados por mim ao longo da minha intervenção letiva.

Translação vertical: Dada uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico cartesiano da função g

definida em $D_g = D_f$, por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u} = (0, c)$.

Translação horizontal: Dada uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função g definida em $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(x - c)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$.

Contração e dilatação vertical: Considerando um plano munido de um referencial cartesiano e uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}^+$ diz-se que o gráfico da função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico de f:

- pela contração vertical de coeficiente a se $0 < a < 1$;
- pela dilatação vertical de coeficiente a se $a > 1$.

Nota: A cada ponto $P(x, y)$ pertencente a um plano munido de um referencial cartesiano, a transformação ϕ do plano que associa ao ponto P o ponto $\phi(P) = P'(x, ay)$ designa-se por contração vertical ($0 < a < 1$) ou dilatação vertical ($a > 1$).

Contração e dilatação horizontal: Considerando um plano munido de um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ diz-se que o gráfico da função g definida em $D_g = \{\frac{x}{a} : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico de f:

- pela dilatação horizontal de coeficiente $\boldsymbol{\frac{1}{a}}$ se $\boldsymbol{0 < a < 1}$;
- pela contração horizontal de coeficiente $\boldsymbol{\frac{1}{a}}$ se $\boldsymbol{a > 1}$.

Nota: A cada ponto $P(x, y)$ pertencente a um plano munido de um referencial cartesiano, a transformação ϕ do plano que associa ao ponto P o ponto $\phi(P) =$

$P'(ax, y)$ designa-se por contração horizontal de coeficiente a $(0 < a < 1)$ ou dilatação horizontal de coeficiente a $(a > 1)$.

Reflexão segundo o eixo das ordenadas: Dado um plano munido de um referencial cartesiano e uma função f $r.v.r$, o gráfico da função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo O_y.

Reflexão segundo o eixo das abcissas: Dado um plano munido de um referencial cartesiano e uma função f $r.v.r$, o gráfico da função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo O_x.

Função par: Uma função, f, real de variável real é par se, para todo o x pertencente ao domínio de f, $-x$ também pertence ao domínio de f e $f(-x) = f(x)$, ou seja,

$$f \text{ é } uma\ função\ par \Leftrightarrow \forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x).$$

Função ímpar: Uma função, f, real de variável real é ímpar se, para todo o x pertencente ao domínio de f, $-x$ também pertence ao domínio de f e $f(-x) = -f(x)$, ou seja,

$$f \text{ é } uma\ função\ ímpar \Leftrightarrow \forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x).$$

3.3. Estratégias de ensino

A subunidade temática lecionada por mim centrou-se essencialmente num tipo de estratégia de ensino, o ensino exploratório. Este tipo de ensino tem como objetivo deixar o aluno "descobrir e a construir o próprio conhecimento" (Ponte, 2005, p.13). Além disso, visa que o aluno desenvolva "capacidades matemáticas", o "raciocínio matemático" e a "comunicação matemática" (Canavarro, 2011, p. 11). É ainda de salientar que o ensino exploratório se foca na aprendizagem do aluno, tendo em vista tarefas ricas que poderão ser trabalhadas de forma colaborativa (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Para poder ir ao encontro do que foi dito anteriormente, procurei introduzir o ensino exploratório nas aulas que corresponderam à minha intervenção letiva. Sendo o tema das transformações propício a este tipo de ensino devido à possibilidade de uma exploração que pode ser feita com o recurso a um *software* dinâmico, neste caso o Geogebra e a calculadora gráfica, optei por implementá-lo ao longo da subunidade letiva de forma a que os alunos explorassem as características de um gráfico transformado ao mesmo tempo que eram apoiados por uma destas ferramentas tecnológicas.

Das nove aulas lecionadas por mim, sete aulas incluíam tarefas exploratórias e a utilização de uma ferramenta tecnológica. Tal como mencionado no enquadramento teórico, a visualização é essencial neste tema em que as modificações ocorrem no gráfico de uma função, gerando logo uma nova função. Por isso mesmo, optei pela utilização do software Geogebra que possibilitou explorar os gráficos de funções de um ponto de vista mais geométrico. Nas restantes duas aulas, foquei-me na realização de exercícios de natureza analítica sobre o presente tópico, visto os alunos ainda não terem trabalhado as funções analiticamente.

O ensino exploratório costuma estar organizado em três fases: o “lançamento da tarefa”, a exploração da tarefa pelos alunos” e a “discussão e sistematização” (Stein *et al.*, 2008 citado em Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p.31). No entanto, a fase de lançamento não foi contemplada por mim ao longo das aulas destinadas a este tipo de ensino. Esta opção deveu-se ao facto de acreditar que os alunos conseguiriam iniciar a tarefa sem necessitarem de esclarecimentos. Contudo considero que na primeira aula teria sido fundamental ter feito este “lançamento da tarefa” (Stein *et al.*, 2008 citado em Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p. 31) de modo que os alunos percebessem o objetivo central deste tipo de tarefas. Como as tarefas seguintes eram de natureza muito semelhante, penso que esta fase poderia então ser omitida.

Assim sendo, as aulas que se desenrolaram numa perspetiva de ensino exploratório tiveram todas a mesma estrutura, contemplando as segunda e terceira fases consideradas por Stein *et al.* (2008, citado em Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p. 31). Cada aula era iniciada com a proposta da tarefa, que era realizada de forma autónoma por parte dos alunos, seguindo-se de um momento de discussão das suas resoluções e terminando com a discussão das principais ideias exploradas ao longo da aula.

A realização das tarefas foi feita em grupo, tendo havido quatro grupos no total. Ao longo da realização das tarefas tentei promover o trabalho colaborativo entre os vários elementos do grupo, bem como a capacidade de entreajuda. Cada grupo dispunha de dois computadores portáteis que pertenciam aos próprios alunos. Inicialmente todos os alunos trouxeram o seu computador, tendo sido logo informados que cada grupo poderia ter apenas dois computadores. Esta opção deveu-se ao facto de concluir, logo após a primeira aula, que os alunos acabavam por trabalhar sozinhos, não havendo um trabalho colaborativo dentro de cada grupo. Apesar de a escola dispor de uma sala com computadores, esta não foi utilizada pelos alunos durante a lecionação devido a duas razões principais. Por um lado, devido à dificuldade de instalar o software nos computadores da escola, que exigiam uma instalação do mesmo cada vez que seria utilizado em aula. Por outro lado, permitiu aos alunos à posteriori ter acesso ao trabalho que iam desenvolvendo durante as aulas. Por sugestão do professor cooperante foi pedido aos alunos que trouxessem os seus computadores com o software já instalado.

Ao longo da fase de "exploração", como professora fui circulando pela sala a fim de acompanhar, orientar e apoiar o trabalho autónomo que os alunos desenvolviam ao longo da realização da tarefa (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Ao mesmo tempo procurei monitorizar com o intuito de observar, ouvir e avaliar as ideias matemáticas dos alunos, interpretando e dando sentido às mesmas (Canavarro, 2011). Simultaneamente, procurei alertar para a necessidade de apresentarem as justificações para as suas resoluções. Esta fase permitiu-me ainda fazer uma seleção das respostas que considerei importantes serem partilhadas no momento de discussão, de forma a obter um conjunto de ideias matemáticas variadas e adequadas (Canavarro, 2011).

A fase da discussão realizada em grupo-turma oralmente e com o recurso ao software Geogebra, teve como intuito a participação oral por parte dos alunos e procurou que estes fossem capazes de desenvolver uma das capacidades transversais previstas para estas aulas, neste caso, o sentido crítico, uma vez que a sala de aula estava equipada com o que permitia visualizar as construções realizadas com o software Geogebra durante a discussão da tarefa. Ao longo da mesma procurei focar-me em "encorajar a reflexão matemática" e "promover o raciocínio matemático" (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013, p.32). O primeiro objetivo centrou-se em procurar que os alunos refletissem sobre as conclusões que tinham conseguido tirar ao longo da tarefa, recorrendo à generalização das ideias matemáticas. No momento de discussão procurei que os alunos justificassem as ideias e estratégias utilizadas ma realização da tarefa, promovendo assim o raciocínio matemático nesta fase (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Posteriormente, a apresentação das ideias relativas ao tema trabalhado ao longo da aula foi feita por mim, em formato *powerpoint*. Este momento possibilitou uma sistematização dos conteúdos trabalhados na presente aula, de forma a “sintetizar as aprendizagens matemáticas dos alunos” (Canavarro, 2011, p.11). Simultaneamente, procurei interpelar os alunos com alguns exemplos dados por mim, tentando, mais uma vez, recorrer ao questionamento oral e ao incentivo do desenvolvimento do espírito critico. Para a elaboração das presentes ideias, recorri ao manual escolar Máximo (2017).

Além do *software* Geogebra, a calculadora gráfica foi também utilizada em sala de aula. Esta é uma ferramenta incluída no material escolar obrigatório dos alunos e, como tal, inclui-a ao longo da subunidade para que os alunos pudessem familiarizar-se e trabalhar com um recurso tão rico no que diz respeito à representação gráfica de uma função. As tarefas destinadas à utilização da calculadora foram realizadas logo após cada transformação ter sido trabalhada com o Geogebra.

Devido à falta de tempo ao longo da subunidade de ensino, foi proposto aos alunos, como trabalho de casa, um conjunto de exercícios que tinham como objetivo a consolidação dos conhecimentos adquiridos em aula.

As últimas duas aulas, antes da ficha de avaliação, foram destinadas à resolução de exercícios sobre as transformações geométricas dos gráficos de funções. Os exercícios propostos aos alunos foram ao encontro dos objetivos do programa e que foram mencionados anteriormente, na secção relativa à Ancoragem e organização da subunidade de ensino. Estas aulas procuraram dar oportunidade ao aluno de resolver exercícios de forma analítica sobre o tema em causa, visto quase toda a subunidade ter sido focada no ensino exploratório e na relação que existe entre a componente gráfica e algébrica.

3.5. Tarefas

A escolha das tarefas deve ter sempre em conta o conteúdo matemático que se pretende trabalhar, os alunos e a aprendizagem que estas poderão potenciar (Gafanhoto & Canavarro, 2013). Canavarro (2011) salienta a importância das tarefas exploratórias, onde os alunos “têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado” (p. 11).

As tarefas, segundo Ponte (2005), são caracterizadas segundo o grau de desafio matemático e de estrutura. Especificamente as tarefas de exploração são consideradas como sendo acessíveis à maioria dos alunos e tendo uma estrutura mais fechada (Ponte,2005). Deste modo, procurei construir tarefas que fossem acessíveis aos alunos, dadas as suas dificuldades na disciplina de Matemática, e lhes permitisse explorar o tópico das transformações. Além disso, as tarefas que contêm uma natureza mais acessível proporcionam aos alunos o "desenvolvimento da sua autoconfiança, bem como o elevado grau de sucesso" (Ponte, 2014, p. 21). Ainda é importante realçar a importância que estas tarefas têm relativamente ao desenvolvimento de capacidades transversais, nomeadamente a autonomia e o sentido crítico perante as conclusões que advêm do trabalho desenvolvido pelos alunos (Ponte, 2014).

Como referi no ponto anterior, as tarefas exploratórias propostas aos alunos foram acompanhadas de dois recursos didáticos, o software Geogebra e a calculadora gráfica. Esta opção deveu-se ao facto de esta subunidade ser favorável à utilização de uma ferramenta tecnológica, permitindo aos alunos poder explorar o presente tópico com a ajuda de um material que lhes permitisse aceder às representações gráficas de forma mais eficaz (Consciência & Oliveira, 2011).

Para a elaboração das tarefas, recorri sempre a dois tipos de funções, a função quadrática e a função cúbica. Esta opção deveu-se ao facto de a função quadrática ser conhecida pelos alunos desde o 9.º ano e a função cúbica ser uma das funções que iria ser trabalhada neste ano letivo, tentando que os alunos fossem tomando contacto com esta última função. Seguidamente, apresento de forma mais detalhada as tarefas propostas ao longo da subunidade aos alunos, assim como os objetivos visados por cada uma delas.

3.5.1. Ficha de Trabalho n.º 1

A primeira ficha de trabalho (anexo 2.1.) proposta aos alunos tinha como principal objetivo a exploração do tópico referente à translação vertical e horizontal. Esta foi dividida em duas partes, sendo a primeira parte dedicada à translação vertical e a segunda parte à translação horizontal. Como a translação vertical é mais intuitiva para a maioria dos alunos (Faulkenberry & Faulkenberry, 2010), optei por colocá-la em primeiro lugar nesta tarefa.

A primeira questão tinha como principal objetivo representar a função dada no Geogebra, identificando, de seguida, o seu domínio, o contradomínio e os zeros. Foi pedido aos alunos para deslocarem o gráfico da função inicial um certo número de unidades para baixo. Desta forma, foi dada a oportunidade aos alunos de recordarem que uma translação tem de estar sempre associada a um certo vetor.

A alínea d) tinha como objetivo os alunos compararem mais valores entre as duas funções em causa, construindo uma tabela que lhes permitisse perceber a diferença entre as imagens da função original e as imagens da função obtida através da transformação. É dada nesta alínea a possibilidade de os alunos utilizarem a representação numérica, de modo a explorar alguns casos particulares.

A segunda parte da tarefa, referente à translação horizontal, procurou apresentar uma exploração que permitisse aos alunos entender a expressão analítica referente ao gráfico transformado, que não seria tão intuitiva como na translação vertical. Sendo esta uma transformação que desloca o gráfico da função para a direita, seria de esperar que, em termos de expressão analítica, os alunos afirmassem que a cada objeto pertencente ao domínio seria adicionado algo e não subtraído. Para ajudar a clarificar este ponto introduzi as questões b) e c) recorrendo mais uma vez, à representação numérica utilizando vários pontos de ambos os gráficos. Ao mesmo tempo, na alínea iii) tentei que os alunos trabalhassem com dois pontos com a mesma ordenada, mas com abcissas diferentes, de modo a que fosse possível perceberem o que ocorre às abcissas dos pontos e percebessem que implicações teria isso na expressão analítica.

Por fim, a questão h) tinha como intenção a justificação da expressão analítica, tendo em conta tudo o que foi explorado nas alíneas anteriores.

3.5.2. Ficha de Trabalho n.º 2

A segunda ficha de trabalho (anexo 2.2.) foi ao encontro das fichas anteriores, contudo esta era, apenas, apoiada pela calculadora gráfica. Esta incidia sobre o mesmo tópico das fichas anteriores - translação vertical e horizontal - e tinha como objetivo a exploração da translação vertical e horizontal com a calculadora gráfica, bem como a possibilidade de explorar este tópico com casos particulares. O domínio e o contradomínio da função eram limitados por intervalos, permitindo ao aluno trabalhar com a translação quando é feita uma restrição no domínio da função. Ao mesmo tempo, permitiria ao aluno mobilizar conhecimentos que tinham sido trabalhados com a ficha anterior, nomeadamente, a identificação da expressão analítica da função cujo gráfico era o transformado de outro por meio de uma translação.

3.5.3. Ficha de Trabalho n.º 3

A presente ficha (anexo 2.3.) teve como principal objetivo a exploração do tópico relativo à contração e dilatação vertical e horizontal. Nesta ficha de trabalho, procurei trabalhar mais com as coordenadas dos pontos do gráfico relativos aos extremos e aos zeros.

Nas primeiras duas alíneas, da primeira parte, tinha como objetivo que os alunos representassem a função f no Geogebra, indicando o domínio, o contradomínio, os zeros e os extremos. Logo de seguida, nas alíneas seguintes os alunos tinham que representar no Geogebra duas novas funções, g e h, cujo gráfico resultava do gráfico da função f, identificando, mais uma vez, o domínio, contradomínio, zeros e extremos. No mesmo seguimento, a questão d) procurava que o aluno recorrendo à visualização identificasse as diferentes alterações ocorridas do gráfico da função f para o gráfico das funções g e h.

A questão f), através da elaboração da tabela que continha as coordenadas dos pontos referentes aos zeros e aos extremos, tinha como principal objetivo levar os alunos a comparar e relacionar alguns pontos do gráfico de f com os pontos correspondentes nos gráficos, de g e h. Especificamente, esta questão, procurava que o aluno conseguisse explorar a relação entre o coeficiente multiplicado à função f e os extremos das funções g e h. Sendo assim, era esperado que os alunos percebessem que todos as ordenadas dos pontos do gráfico de g e h eram obtidas multiplicando as ordenadas dos pontos correspondentes do gráfico de f pelo coeficiente multiplicado à função f.

Por fim, a última alínea da questão f) tinha como objetivo a identificação (e justificação) da expressão analítica das funções g e h, tendo em conta tudo o que tinha sido trabalhado nas questões anteriores.

A segunda parte da tarefa, que correspondia à exploração da contração e dilatação horizontal, teve exatamente a mesma estrutura que a primeira parte da tarefa. Esta parte, tal como a primeira, tinha como objetivo que os alunos pudessem tomar consciência das alterações que, em termos gráficos, haveria quando o gráfico de uma função é alterado, por meio das transformações referidas. Era tido como foco a representação numérica através da elaboração de uma tabela que lhes permitisse comparar os zeros e as coordenadas dos pontos extremos de f e de i e j. As alíneas da questão c) tinham como objetivo, tal como na primeira parte da tarefa, que os alunos identificassem o coeficiente que transforma os pontos do gráfico de f nos pontos do gráfico de i e j.

Por último, era solicitado aos alunos que identificassem a expressão analítica das funções i e j, justificando e tendo em conta as alíneas anteriores.

3.5.4. Ficha de Trabalho n.º 4

A quarta ficha de trabalho (anexo 2.4.) centrou-se essencialmente nas transformações contração e dilatação vertical e horizontal, tendo sido apoiada pela utilização da calculadora gráfica. Essencialmente, esta tarefa tinha como objetivo aplicar conhecimentos e aprendizagens que a ficha anterior tinha proporcionado aos alunos, constituindo uma tarefa de aplicação. Ao mesmo tempo, esta permitia aos alunos trabalhar com outra ferramenta tecnológica, a calculadora gráfica.

Na questão c) era esperado que os alunos, ao representarem na calculadora gráfica as funções dadas, pudessem identificar a transformação associada, relacionando desta forma a componente gráfica e algébrica. Além disso, esta questão ainda exigia que os alunos determinassem os zeros e as coordenadas dos pontos correspondentes aos extremos. Esta ação tinha como objetivo os alunos perceberem que alterações seriam efetuadas às ordenadas e às abcissas dos pontos do gráfico que seria transformado segundo uma contração ou dilatação. Nesta questão optei por solicitar apenas as coordenadas dos pontos relativos aos extremos porque estes iriam ter sempre alterações nas abcissas ou nas ordenadas, em qualquer uma das alíneas desta questão. Como os pontos relativos aos zeros só poderiam ter alterações nas abcissas, sendo sempre a ordenada zero, optei apenas por pedir os valores dos zeros.

3.5.5. Ficha de Trabalho n.º 5

A ficha de trabalho n.º 5 (anexo 2.5.) introduziu o tópico sobre a transformação reflexão nos gráficos de funções. Esta tarefa era apoiada pela utilização do software Geogebra, tendo o intuito de os alunos recorrerem à visualização e poderem estabelecer a relação entre a representação gráfica e algébrica. A questão 1 pretendia levar os alunos a fazerem uma exploração da reflexão segundo o eixo das ordenadas, enquanto a questão 2 estava direcionada para a reflexão segundo o eixo das abcissas.

Logo na primeira questão, os alunos tinham de representar a função no Geogebra, indicando de seguida o domínio, contradomínio e zeros da função. Estas últimas questões tinham como objetivo caracterizar a função, utilizando conhecimentos prévios que os alunos já tinham adquirido antes de ter sido lecionado este tópico das transformações.

Na questão d) foi pedido aos alunos que representassem a função $g(x) = f(-x)$. Esta questão procurava que os alunos identificassem que tipo de transformação ocorria no gráfico de f e que relações tinha essa transformação com a representação algébrica da função g. De forma a apoiar o objetivo desta questão, a alínea iv) da questão procurava fazer uma comparação entre vários pontos do gráfico de f e do gráfico de g. Posteriormente, a alínea v) tinha o intuito de os alunos conseguirem estabelecer a relação entre as diferentes representações, trabalhadas nas alíneas anteriores, conseguindo indicar a expressão analítica da nova função.

A questão e) tinha a intenção de conduzir os alunos a relacionar as diferentes transformações que foram sendo estudadas até ao momento. Deste modo, procurei que nesta questão, os alunos fossem capazes de se recordar de outras transformações apercebendo-se que é possível ter ocorrido mais do que uma transformação.

A questão 2, destinada à exploração da reflexão segundo o eixo das abcissas, teve a mesma estrutura que a questão 1, iniciando-se pela representação de uma determinada função e pela identificação do domínio, contradomínio, zeros e extremos. Logo de seguida, na questão b) os alunos representaram a função i, identificando também o seu domínio, contradomínio, zeros e extremos. Desta forma, os alunos poderiam logo estabelecer uma relação entre estas características da função g e i, pedidas na alínea iii). Esta alínea procurava também que os alunos identificassem a transformação que ocorreria entre o gráfico de g e o gráfico de i, através das respetivas representações gráficas visíveis, utilizando o Geogebra.

Mais uma vez, a alínea iv) tinha o propósito de comparar os pontos do gráfico das duas funções, de modo que fosse possível verificar as alterações que ocorrem neste tipo de transformação. Por fim, a última alínea procurava que o aluno soubesse justificar a expressão analítica da função correspondente ao gráfico transformado, tendo em conta tudo o que foi explorado anteriormente.

Por último, a alínea c), tal como a alínea e) da primeira questão, tinha a intenção de recordar uma transformação já trabalhada, relacionando-a com a reflexão. Além do mais, estando associada à contração vertical, os alunos poderiam identificar apenas uma transformação de coeficiente $-\frac{1}{5}$, sem darem conta que existe também uma reflexão.

3.5.6. Ficha de Trabalho n.º 6

Esta ficha (anexo 2.6.) tinha como propósito o estudo da função par e ímpar. Estando este assunto diretamente relacionado com a transformação reflexão, procurei estabelecer relação com o que foi trabalhado na ficha anterior. Esta ficha de trabalho seria realizada pelos alunos com a ajuda da calculadora gráfica.

Logo na primeira questão, era pedido que os alunos representassem a função na calculadora, identificando o domínio e o contradomínio. Estas questões tinham como objetivo estabelecer relação com o que foi trabalhado anteriormente, bem como ser uma ajuda para as questões seguintes. A alínea c) tinha como intenção relacionar as funções injetivas com a noção de função par. Como o tema da injetividade tinha sido trabalhado logo no início do tema das funções, procurei recordar este conceito ao mesmo tempo que era introduzida a noção de função par. Como uma função par é definida quando as imagens de dois objetos simétricos são iguais, a injetividade neste caso não se iria verificar. Para ajudar a identificar este último aspeto, as alíneas d) e e), tinham o intuito de relacionar o gráfico das funções f e g.

Na questão 2, direcionada para o estudo da função ímpar, optei por sugerir aos alunos que representassem a função na calculadora gráfica e a função que resultava da primeira segundo uma reflexão. Ao contrário da questão anterior, na qual era fornecida ao aluno uma ajuda relativamente à expressão analítica de g, na alínea a) da segunda questão, optei por dar a transformação que ocorreria ao gráfico de h, esperando que os alunos conseguissem identificar a expressão analítica pretendida tendo em conta a transformação. Desta forma, os alunos tiveram oportunidade de recordar conhecimentos adquiridos anteriormente.

Para que os alunos pudessem estabelecer, na questão 2, as principais diferenças entre a função i e a função j, as alíneas i) de a) e i) de b), tinham como intenção fazer uma pequena exploração sobre certos pontos e, mais tarde, na questão c) compará-los.

Desta forma, os alunos poderiam estabelecer uma relação entre as funções i e j, deduzindo a noção de função ímpar.

3.5.7. Ficha de Trabalho n.º 7

A ficha de trabalho n.º 7 (anexo 2.7.) teve como ponto central a continuação do estudo da função par e ímpar que foi explorada na ficha de trabalho anterior. Estando estes tópicos diretamente relacionados com a transformação reflexão, procurei incluir nesta ficha de trabalho exercícios que contivessem esta transformação.

Logo na primeira questão e, de modo a recordar as definições de função par e ímpar que advêm da ficha anterior, procurei propor aos alunos um conjunto de funções, solicitando que verificassem a paridade de cada uma delas. Desta forma, procurei que os alunos consolidassem conhecimentos adquiridos anteriormente.

A questão 2, teve como foco principal a transformação reflexão. Este exercício procurava que os alunos caracterizassem as funções que resultavam de uma função cujo gráfico sofreu uma reflexão. Mais uma vez, procurei com esta tarefa que os alunos tomassem consciência das alterações que ocorreriam ao domínio e contradomínio de uma função cujo gráfico tinha sido refletido. A alínea b) tinha como objetivo efetuar o cálculo das imagens de certos objetos por meio de determinadas funções, ao mesmo tempo que permitia consolidar conhecimentos adquiridos anteriormente, nomeadamente a função composta. Sendo a função h uma função que resulta da composição de duas funções, os alunos eram direcionados para determinar a expressão analítica desta função.

As questões 3 e 4 continham um nível de dificuldade maior devido ao seu caracter mais abstrato. Primeiramente, a questão 3 tinha como objetivo mostrar que as funções aí apresentadas eram pares ou ímpares. A alínea b) procurava relacionar as funções g e h com a função f através das conclusões tiradas na alínea a). A última questão, a questão 4, focou-se essencialmente na noção de função par exigindo que os alunos fossem capazes de efetuar operações algébricas para obter o valor do coeficiente k.

3.5.8. Ficha de Trabalho de casa

A Ficha de Trabalho (anexo 2.8.) foi trabalhada pelos alunos em casa. A presente ficha tinha como principal objetivo a resolução de exercícios sobre as transformações translação, contração e dilatação. Esta procurou ter um conjunto de exercícios que desse oportunidade aos alunos de aplicar os conhecimentos e aprendizagens adquiridas sobre este tema. À exceção da questão 5, que tinha um carácter mais problemático, todas as questões consistiam eram exercícios de consolidação. A ficha de trabalho foi proposta aos alunos logo a seguir às aulas em que foram abordados estes tópicos.

A primeira questão, destinada à translação vertical e horizontal, tinha como intuito os alunos reverem o que acontece aos pontos de um gráfico quando é deslocado segundo um certo vetor. A questão 2 procurou focar-se em aspetos característicos da função original e da função cujo gráfico é o transformado do gráfico da primeira. A alínea f) deste exercício tinha uma intenção diferente das alíneas anteriores, procurando interpelar os alunos sobre as transformações que ocorriam ao gráfico de f, tendo em conta as alterações que ocorreram à expressão analítica da função.

A questão 3 procurava centrar-se nos pontos do gráfico da função e no gráfico da função transformada. Deste modo, a primeira alínea deste exercício tinha como objetivo determinar as coordenadas de um ponto que era imagem de outro por meio de uma determinada transformação. A alínea seguinte pretendeu levar o aluno a justificar porque razão os pontos gráfico de g, gráfico transformado do gráfico de f, eram imagens dos pontos do gráfico de f por meio da transformação mencionada em cima.

A questão 4 apresentava um caracter mais abstrato, na medida em que a expressão analítica continha letras que tomavam certos valores consoante as especificidades que eram atribuídas à função. A alínea a) tinha como objetivo indicar o domínio e o contradomínio da função i tendo em conta os valores que eram atribuídos à expressão analítica da função, associando esses valores às transformações que ocorrem no gráfico de f. As alíneas seguintes tinham como intuito ajudar o aluno a identificar as transformações e, consequentemente os valores das letras, tendo em conta algumas das características da função em causa.

Como a calculadora gráfica esteve bastante presente ao longo desta subunidade, procurei que os alunos pudessem ter também uma tarefa com esta ferramenta. Assim sendo, a questão 5, que consistia num problema, tinha o intuito de representar uma certa função na calculadora gráfica, explorando através das capacidades gráficas da calculadora um valor k que adicionado à expressão algébrica da função permitisse que a nova função tivesse apenas um zero.

As questões seguintes incluíam as transformações contração e dilatação, tanto vertical como horizontal. A questão 6, em que era dado o esboço do gráfico de uma função, tinha por objetivo que o aluno desenhasse o gráfico de uma função obtida de outra por meio de uma dilatação vertical, de maneira que os alunos tinham de, perante a informação dada no gráfico de f, ser capazes de determinar os pontos que são imagens de alguns pontos do gráfico de f segundo a transformação em causa. Além disso, sendo dada apenas a expressão da função h,este exercício tinha também como intuito a identificação da transformação tendo em conta as alterações feitas à expressão analítica de f. A alínea seguinte procurava que o aluno, tendo em conta as transformações ocorridas, fosse capaz de indicar o domínio da nova função.

A questão 7, tal como a questão 1 desta ficha de trabalho, procurou fazer uma análise aos pontos que são imagens dos pontos de um certo gráfico por meio de uma transformação efetuada a esse mesmo gráfico. Desta forma, esta questão tinha como objetivo relacionar os pontos do gráfico transformado com a expressão analítica da função cujo gráfico tinha sido transformado.

Por último, a questão 8, tal como já incluído noutras questões, tinha como objetivo principal a determinação do contradomínio da função que correspondia ao gráfico transformado, tendo em conta as transformações que eram possíveis identificar perante as alterações feitas à expressão analítica da função f. Esta questão apenas continha a representação algébrica, cabendo ao aluno identificar as transformações que ocorriam ao gráfico de f.

3.6. Avaliação

A avaliação é "o processo que inclui a recolha de evidência sobre o conhecimento matemático de um aluno, a sua aptidão para o usar…" (NCTM 1995, p. 3 citado em NCTM, 2017), dando a conhecer a compreensão que os alunos revelam num dado momento e sobre um determinado tópico (NCTM, 2017). Deste modo, a avaliação formativa, utilizada ao longo da minha intervenção, teve como principais objetivos a possibilidade de obter informação sobre as aprendizagens e conhecimentos que os alunos iam revelando ao longo da presente subunidade, bem como fornecer o feedback aos alunos do trabalho que estes iam desenvolvendo.

Segundo a Direção-Geral da Educação, a avaliação formativa tem uma função diagnóstica que possibilita, tanto ao professor como ao aluno, obter informação sobre as aprendizagens desenvolvidas, com o intuito de regular os processos e estratégias de ensino. Santos & Semana (2008) afirmam que este tipo de avaliação tem como foco central a atividade dos alunos e procura uma "melhoria e uma regulação do ensino e das aprendizagens" (p. 52).

Dada esta dimensão da avaliação, recorri ao feedback escrito e ao questionamento oral ao longo das aulas. O feedback escrito consiste numa forma de comunicação que se estabelece entre o professor e o aluno, havendo necessidade de ser regular e central na avaliação formativa (Black & William, 1998 citados em Dias & Santos, 2006). Desta forma, no final de cada aula, os alunos entregavam-me a resolução da ficha de trabalho que tinha sido trabalhada nessa mesma aula. Estas foram mais tarde analisadas por mim e sujeitas a registos da minha parte, tendo sido entregues nas aulas seguintes à aula em que tinha sido realizada. Ao mesmo tempo esta análise serviu para, mais tarde, ser objeto de estudo para o trabalho de cariz investigativo que estou a realizar com o presente relatório. Toda a análise feita às resoluções dos alunos permitiu-me ter acesso às aprendizagens e dificuldades que os alunos foram revelando ao longo da subunidade de ensino. Aquando da conclusão desta análise procurei alertar os alunos para aspetos que não tinham ficado tão bem consolidados e que necessitavam ser revistos por eles.

O questionamento oral realizado ao longo das aulas possibilitou-me a mim, como professora, tomar consciência das aprendizagens e dificuldades que os alunos iam desenvolvendo no decorrer da aula. Ao mesmo tempo, este permitiu-me fornecer feedback oral aos alunos ao longo da resolução das tarefas propostas, havendo possibilidade de os alunos tomarem consciência do seu próprio trabalho.

Além da avaliação formativa, a presente intervenção, ainda englobou a avaliação sumativa (anexo 4), que decorreu na última aula da minha intervenção e que durou uma hora. A presente componente foi dada aos alunos como ficha de avaliação, na qual englobava apenas os tópicos incluídos na subunidade por mim lecionada. Esta avaliação teve como principal finalidade a análise das resoluções dos alunos que serão mais tarde alvo de estudo para o presente relatório.

3.7. As aulas lecionadas

3.7.1. Aula 1: dia 23 de abril

Esta aula, primeira aula sobre o tema Transformações geométricas dos gráficos de funções, foi realizada tendo em conta o plano de aula elaborado. Esta aula contemplava, essencialmente, três momentos: exploração do Geogebra, resolução e correção da ficha de trabalho e sistematização de ideias. Como os alunos não conheciam o software Geogebra, optei por fazer uma breve introdução ao mesmo, projetando no quadro. Além desta introdução, entreguei um guião aos alunos sobre as ferramentas e comandos deste programa e que apoiaria o seu trabalho ao longo destas aulas. Contudo, os alunos não se serviram muito deste guião, optando por me questionarem em vez de procurar a informação ali disponibilizada. A presente aula incidia sobre a translação vertical e horizontal, na qual os alunos teriam de explorar, perante uma função dada, o que ia acontecendo ao gráfico da função e consequentemente à expressão analítica quando este era movido segundo um determinado vetor. Neste momento, penso que me faltou fazer uma introdução à turma sobre a tarefa proposta, visto esta ser um tipo de tarefa que iria estar também presente nas aulas seguintes e com que os alunos não estavam muito familiarizados.

Os alunos, durante esta aula, trabalharam em grupo e de forma autónoma, tendo sido apoiados por mim durante a realização da ficha de trabalho. Inicialmente os alunos não comunicavam uns com os outros dentro do grupo, visto cada um ter trazido o seu computador, apesar de ter sido apenas pedido dois computadores por grupo. Deste modo, procurei incentivá-los a trabalhar e a comunicar com os vários elementos do seu grupo, alertando para a necessidade de irem partilhando uns com os outros as conclusões a que chegavam.

A primeira questão da ficha de trabalho remetia os alunos para a exploração da translação vertical segundo um certo vetor. Esta tinha como objetivo, os alunos criarem um vetor, com a ajuda do guião fornecido, que lhes permitia deslocar o gráfico da função desenhada já no Geogebra, segundo um certo vetor. Contudo, os alunos não criaram o vetor, acabando por modificar a expressão analítica da função, escrita na folha algébrica do Geogebra, obtendo o gráfico da função inicial deslocado.

A título de exemplo, a função dada era $f(x) = x^2$ e pedia para deslocarem o gráfico desta função quatro unidades para baixo, à qual os alunos, modificaram a expressão $f(x) = x^2$ para $f(x) = x^2 - 4$. Apenas um par de alunos mostrou alguma dificuldade em resolver esta questão, pelo que orientei-os a criar um vetor que permitia deslocar o gráfico.

Apesar de estar planeado a correção desta primeira questão ser realizada logo após os alunos terminarem de a resolver, tal não aconteceu devido ao elevado tempo que gastaram a resolver as primeiras questões propostas. Assim sendo, acabei por corrigir/discutir oralmente somente até à questão c) (anexo 2.1.), enfatizando as diferentes resoluções e conclusões dos alunos. Durante a discussão tentei que os alunos explicassem também a forma como estes trabalharam no Geogebra, questionando dois alunos que tinham deslocado o gráfico de duas formas diferentes. Porém, devido à falta de tempo, optei por realizar a maior parte da discussão oralmente, não recorrendo muito ao Geogebra. Penso que poderia ter sido bastante benéfico ter sugerido ao aluno que tinha utilizado o vetor para deslocar o gráfico, mostrar aos restantes alunos como o tinha feito no Geogebra. As restantes questões foram corrigidas pouco depois, enfatizando a representação numérica e não remetendo os alunos tanto para a relação entre a representação algébrica e a representação gráfica.

Na segunda questão, relativa à translação horizontal, os alunos foram alertados pela professora que este tipo de translação não seria tão claro como na translação vertical. Neste seguimento, os alunos optaram por fazer a deslocação do gráfico através do vetor. Como não tinha sido explicado como utilizar o vetor, anteriormente aquando da discussão relativa à translação vertical, os alunos acabaram por me questionar muitas vezes como se fazia tal procedimento no Geogebra.

Após a maioria dos alunos ter terminado a segunda questão, prossegui para a discussão em grupo-turma. Esta discussão realizou-se oralmente, tendo havido uma alínea que foi corrigida por uma aluna no quadro. Mais uma vez, não estabeleci a relação da representação algébrica com a representação gráfica, dando mais enfase à representação numérica através das tabelas que os alunos realizaram e que lhes era pedido numa das alíneas da tarefa proposta.

A maioria dos alunos compreendeu o conceito de translação, tendo conseguido identificar a maioria das alterações que ocorreriam nas diferentes translações, vertical e horizontal, apesar de não mencionarem as alterações que foram ocorrendo em termos gráficos.

Por fim, devido ao tempo que os alunos demoraram a resolver a tarefa prevista para esta aula, a síntese final, feita em powerpoint por mim, acabou por ser feita apressadamente.

No geral, os objetivos esperados para esta aula foram cumpridos. Como futura professora senti, nesta primeira aula, alguma dificuldade em gerir o tempo. Penso que este foi um fator que me atrapalhou, não tendo conseguido incentivar os alunos a uma discussão que incluísse os aspetos fundamentais que tinham sido pensados para esta aula. Outra dificuldade que senti foi o facto do painel do projetor estar sobreposto ao quadro, tornando-se difícil fazer referência a certos elementos do Geogebra.

3.6.2. Aula 2: dia 24 de abril

A segunda aula teve início com a sistematização das ideias sobre a translação apresentadas no final da aula anterior e que, devido à falta de tempo, não foi possível sintetizar com calma os aspetos essenciais sobre este tópico. Durante esta sistematização, salientei a relação entre a representação algébrica e a representação gráfica, uma vez que este aspeto não tinha sido tão bem consolidado na aula anterior. De modo a incluir os alunos nesta sistematização de ideias, que era uma conclusão do que os alunos tinham realizado na aula anterior, procurei interpelá-los a partir dos vários exemplos que ia apresentando. Pude verificar, neste momento, que os alunos ainda revelavam algumas dificuldades em relação à translação horizontal, tendo aproveitado esta altura para esclarecer as dúvidas que estes demonstraram.

Posteriormente, e tal como estava previsto no plano de aula, o trabalho de casa proposto na aula anterior foi corrigido pela professora em conjunto com a turma, oralmente e no quadro. As questões resolvidas oralmente eram as questões mais simples que não envolviam muitos cálculos. Além disso certifiquei-me junto dos alunos que estes tinham compreendido e conseguido fazer este trabalho. Apenas duas das questões foram corrigidas por mim no quadro, devido a uma exigência maior em termos de cálculos. Durante a correção do trabalho de casa fui-me apercebendo de que ainda existiam algumas dúvidas relativamente às translações, verificando que uma aluna ao ser questionada sobre o trabalho de casa confundiu a translação vertical com a horizontal. A título de exemplo, perante a expressão $g(x) = f(x) + 2$, questionei a mesma aluna acerca da transformação que ocorreria ao gráfico de f, ao que a aluna conclui que ocorreu uma translação horizontal, sendo o gráfico de f deslocado duas unidades para a esquerda. Perante esta situação, interpelei outro aluno que identificou, corretamente, tal transformação como sendo uma translação vertical. Antes de prosseguir com a aula, voltei a salientar a diferença entre as duas translações, certificando-me que a aluna tinha compreendido.

Seguidamente, os alunos realizaram a tarefa sobre a translação vertical e horizontal com recurso à calculadora gráfica. Optei por resolver esta tarefa em conjunto com a turma porque os alunos ainda não estavam muito familiarizados com a calculadora gráfica e o tempo que estava previsto para a realização desta tarefa não permitia que os mesmos explorassem esta ferramenta sozinhos. Durante a resolução da mesma, apercebi-me que uma das alunas mostrou alguma dificuldade em responder à alínea d) da primeira questão (anexo 2.2.), afirmando que, perante um deslocamento do gráfico em cinco unidades para a esquerda a expressão analítica da função era $h(x) = g(x) - 5$. Perante a dificuldade da aluna, interpelei a turma sobre o que aconteceria ao gráfico caso subtraísse à função g cinco unidades. No geral, os alunos foram capazes de concluir que tal mudança iria afetar o gráfico verticalmente. Mais tarde, analisando as resoluções dos trabalhos desta aluna, constatei que esta tinha percebido e assimilado a aprendizagem esperada.

O tempo utilizado para esta tarefa não foi ao encontro do que estava previsto no plano de aula. Desta forma, optei por que os alunos terminassem em casa e entregando-me na aula seguinte. Nesta altura, os alunos já estavam familiarizados com a calculadora gráfica, tendo pensado que seria benéfico disponibilizar uma parte da tarefa para resolverem em casa de forma autónoma.

Logo de seguida, os alunos iniciaram a tarefa exploratória relativa à contração e dilatação vertical e horizontal. Esta tarefa foi resolvida de forma autónoma e em grupo. Ao contrário, da aula anterior, durante o trabalho autónomo, fui incentivando os alunos a relacionarem a expressão algébrica com o que ia acontecendo ao gráfico da função transformada. Desta forma, os alunos foram capazes de estabelecer uma relação entre o coeficiente considerado e a transformação associada.

Durante a discussão, optei por utilizar mais o Geogebra, interpelando os alunos acerca das suas próprias conclusões e criando situações novas a fim de perceber se os alunos adquiriram as aprendizagens esperadas para esta aula. A função escolhida para a exploração da contração e dilatação vertical era uma função quadrática definida, em $\mathbb{R}$, por x^2. Esta função acabou por suscitar algumas dúvidas relativamente à

transformação em causa, porque quando os alunos obtinham o gráfico desta função depois de efetuar uma contração vertical, estes afirmaram que deveria ter ocorrido uma dilatação e não uma contração. Esta observação feita por parte dos alunos deveu-se ao facto de estes estarem a analisar o gráfico a nível horizontal e não vertical.
Mais uma vez, o tempo previsto para cada etapa da aula não foi cumprido, não tendo havido tempo para a segunda parte da ficha de trabalho n.º 3 (ver anexo 2.3.) relativa à contração e dilatação horizontal. Deste modo, também já não foi possível fazer uma sistematização das ideias sobre a contração e dilatação horizontal.

3.7.3. Aula 3: dia 26 de abril

A tarefa da contração e dilatação não tinha ficado terminada na última aula, tendo, por isso alterado o meu plano de aula, planeando para esta aula a conclusão desta última tarefa e a tarefa da contração e dilatação recorrendo à calculadora gráfica.

Primeiramente, e antes do sumário ser dito por mim, entreguei as resoluções das fichas de trabalho que os alunos resolveram nas duas aulas anteriores, chamando a atenção para alguns aspetos que não estavam tão bem consolidados, tais como, a noção de vértice de uma parábola. Depois de analisar as resoluções constatei que os alunos se referiam ao vértice de uma função e não ao vértice de uma parábola. No mesmo seguimento, e sendo este um tema que envolve noções de funções e noções de gráficos de função, alertei os alunos para o facto de os extremos e os zeros corresponderem a valores e não a pontos pertencentes ao gráfico. Esta observação deveu-se também ao facto de ter pedido na tarefa da aula anterior as coordenadas dos pontos do gráfico correspondente aos zeros e aos extremos, podendo ter deixado os alunos confusos relativamente a esta questão.

Posteriormente, e de forma a perceber se os alunos tinham realizado as aprendizagens esperadas relativamente à contração e dilatação vertical, realizei uma pequena revisão sobre o que foi abordado na aula anterior, utilizando o Geogebra. Ao longo deste momento, procurei estabelecer uma relação entre as várias representações, gráfica, numérica e algébrica. Ao mesmo tempo que mostrava os gráficos no Geogebra, interpelava os alunos acerca da relação entre a expressão analítica do gráfico da função transformada e o próprio gráfico.

Seguidamente os alunos terminaram de resolver a tarefa da contração e dilatação horizontal, trabalhando de forma autónoma e em grupo. Enquanto circulava pela sala e observava o trabalho que os alunos realizavam, fui insistindo para que estes abordassem as diferentes representações gráficas que iam obtendo depois do gráfico da função com que estavam a trabalhar sofrer uma transformação. Através da análise feita às resoluções das aulas anteriores, apercebi-me que os alunos não analisavam muito este aspeto.

A discussão sobre a contração e dilatação horizontal foi realizada de seguida. Esta não foi realizada no tempo previsto, pois os alunos demoraram mais tempo a realizar esta última questão. Durante a discussão procurei estabelecer uma relação com as transformações abordadas anteriormente, a contração e dilatação vertical, nomeadamente o que ia acontecendo graficamente a cada uma das funções, vertical e horizontalmente. Ainda questionei os alunos acerca do que ia acontecendo aos pontos relativos aos extremos e aos zeros, de modo a ajudá-los a refletir acerca da relação entre as abcissas dos pontos do gráfico da função e as abcissas dos pontos do gráfico da função transformada.

A tarefa relativa a este último subtópico e na qual era pedido aos alunos que utilizassem a calculadora gráfica foi realizada logo de seguida em grupo turma. A realização desta última tarefa estava prevista ser feita de forma autónoma pelos alunos, contudo devido à falta de tempo, esta foi realizada em grupo-turma. Mais uma vez, procurei recorrer à representação numérica questionando que operação era efetuada aos extremos da função inicial, de modo a obter os extremos da função transformada. Nesta altura, apercebi-me que um dos alunos revelou dificuldades relativamente ao coeficiente da transformação, fazendo confusão entre a transformação vertical e horizontal. A título de exemplo, nesta tarefa apresentada, o aluno tinha de identificar a transformação ocorrida ao gráfico que originou a função $j(x) = 3f(x)$. No geral, os alunos ao verificarem na calculadora gráfica o gráfico relativo à função j, perceberam que este resultou do gráfico de f segundo uma dilatação vertical, contudo tiveram alguma dificuldade em identificar o coeficiente, afirmando que esta transformação estava associada ao coeficiente $\frac{1}{3}$.

Perante esta situação, voltei a interpelar os alunos sobre a transformação que ocorria e se esta seria horizontal ou vertical, visto ter percebido que os alunos deveriam estar a confundir com o caso da contração e dilatação horizontal, no qual o coeficiente corresponde ao inverso.

A presente tarefa não foi terminada em aula, tendo proposto aos alunos terminarem a mesma em casa, além do trabalho de casa que já estava previsto ser dado aos alunos. A aula terminou com a sistematização de ideias relativas à contração e dilatação horizontal, tendo sido cumpridos os objetivos esperados para esta aula.

3.6.4. Aula 4: dia 30 de abril

A presente aula iniciou-se com uma breve revisão dos conteúdos trabalhados na aula anterior. Isto porque na aula passada apercebi-me que os mesmos revelaram alguma dificuldade relativamente à contração e dilatação. Além disso, as resoluções dos alunos relativas da aula anterior foram analisadas por mim e pude verificar que eles tiveram alguma dificuldade em relacionar a representação gráfica com a representação algébrica, confundido o caso vertical com o horizontal.

Deste modo, a aula foi iniciada com alguns exemplos de expressões analíticas onde questionei os alunos relativamente às transformações ocorridas aos respetivos gráficos. Durante esta interpelação, apercebi-me, que alguns alunos revelaram dificuldade em relacionar o coeficiente com a transformação associada. O primeiro exemplo dado foi relativo à função $g(x) = f(3x)$, sendo que o aluno questionado por mim identificou que o gráfico de f sofria uma contração horizontal de coeficiente 3. Quando questionado sobre o que acontece ao gráfico de uma função quando este contrai, o aluno entendeu logo que o coeficiente associado a esta transformação não poderia ser 3, mas sim $\frac{1}{3}$. O segundo exemplo, $g(x) = 6f(x)$, não gerou muitas dificuldades aos alunos, conseguindo estes identificar corretamente a transformação associada. Por fim, sugeri o exemplo $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$ a um dos alunos da turma, afirmando este que o gráfico de f sofria uma dilatação vertical. De modo a tentar perceber se esta dificuldade era verificada por outros alunos, questionei outro aluno acerca deste mesmo exemplo, conseguindo o mesmo justificar que as ordenadas dos pontos do gráfico de f iriam ser multiplicadas por $\frac{1}{3}$, ficando estas com um valor menor. Perante esta situação, insisti no que acontece em cada caso deste tipo de transformação, certificando-me se os alunos tinham entendido.

Posteriormente, os alunos iniciaram a tarefa sobre a reflexão, trabalhando de forma autónoma. Fui acompanhando o trabalho dos alunos, durante o qual pude observar que alguns deles revelaram algumas dificuldades em perceber em que eixo se efetuava a reflexão, afirmando por vezes que como existiam alterações nas abcissas dos pontos, a reflexão seria segundo o eixo O_x. Perante esta dificuldade, orientava os alunos a refletirem sobre o que ia ocorrendo às abcissas e às ordenadas dos pontos quando refletiam o gráfico segundo um certo eixo.

A discussão realizada em grupo turma, relativa à tarefa acerca da reflexão segundo o eixo das ordenadas, foi realizada assim que a maioria dos alunos terminou, utilizando o Geogebra como suporte. Esta discussão permitiu-me perceber que os alunos compreenderam o que ia acontecendo ao gráfico e aos pontos da função, depois desta ser refletida. Aproveitei, ainda, este momento para ajudar os alunos a refletir acerca do que poderia acontecer ao domínio quando o gráfico de uma certa função é refletida segundo o eixo das ordenadas. Como ainda tinha os gráficos das funções no Geogebra, sugeri aos alunos que considerassem apenas uma parte da representação gráfica, questionando-os acerca do domínio da nova função. Estes foram capazes de perceber que os elementos do domínio da função transformada corresponderiam ao simétrico dos elementos do domínio da função inicial.

Na questão 1 e) (anexo 2.5.), que envolvia a transformação da contração e da reflexão, verifiquei que alguns alunos conseguiram identificar ambas as transformações, nomeadamente a contração. Mais tarde, pude verificar isso com as resoluções que os alunos me entregaram no final desta aula. Nesta questão, apenas surgiu uma dúvida relativamente à prioridade das transformações, mas que acabou por não ficar totalmente esclarecida.

A tarefa sobre a reflexão segundo o eixo das abcissas foi também realizada pelos alunos de forma autónoma, tendo eu tido um papel orientador nesta fase de trabalho. Contudo, e devido ao tempo previsto para este momento já ter sido ultrapassado, a correção das primeiras alíneas foi sendo feita por mim à medida que os alunos iam terminando. As últimas questões foram discutidas e corrigidas pouco tempo depois, com a ajuda do Geogebra. Nesta fase, os alunos foram capazes de explicar que as imagens se iriam alterar, assim como, as ordenadas dos pontos do gráfico da função.

Ao longo da aula, foi possível observar que os alunos já se sentiam mais familiarizados com o recurso do Geogebra, havendo alguns deles a resolverem algumas questões da ficha de trabalho, que eram destinados ao Geogebra, de forma diferente do habitual e recorrendo a outras ferramentas presentes no software. Para esta aula, estava previsto ter abordado a função par e a função ímpar, contudo tal não foi possível devido ao facto de os alunos terem demorado mais tempo do que era esperado para cada momento.

No entanto, relativamente à transformação da reflexão, penso que no geral os objetivos de aprendizagem, descritos no plano de aula, foram cumpridos.

3.7.5. Aula 5: dia 3 de maio

A aula do dia 3 de maio foi iniciada, tal como previsto no plano de aula, por uma breve revisão dos conteúdos da aula anterior e pela conclusão da ficha e trabalho n.º 5. A questão que tinha ficado por terminar englobava vários tipos de transformação, aspeto que tinha sido levantado como problemático na aula anterior. Assim sendo, pedi aos alunos para representarem, no Geogebra, as funções relativas à alínea $f)$ (anexo 2.5.) da segunda questão da ficha de trabalho n.º 5, de forma a que estes percebessem que no caso de uma reflexão e de uma contração era indiferente aplicar uma e depois a outra.

No entanto, os alunos ao identificarem a transformação associada à contração horizontal revelaram ainda ter algumas dúvidas. Isto porque a função que estava a ser considerada era uma função quadrática cuja representação é uma parábola e que quando é aplicada uma contração vertical a este tipo de função, os alunos apercebem-se que existe também uma mudança horizontalmente, tal como mencionado na segunda aula, no dia 24 de abril.

Logo após esta exploração, e tal como previsto no plano de aula, os alunos iniciaram a ficha de trabalho n.º 6 (anexo 2.6.) relativa à função par e ímpar. Esta ficha de trabalho foi realizada com a calculadora gráfica. Este é um recurso que os alunos já conhecem, tendo os mesmos realizado a ficha de forma autónoma. Apenas foi necessário um apoio da minha parte para na questão $2a)i)$, na qual era pedido que os alunos determinassem as imagens dos referidos objetos por meio da função h.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, pude verificar que estes revelavam dificuldades em representar as funções na calculadora gráfica, visto não conseguirem definir corretamente a expressão analítica de $f(-x)$. Esta dificuldade associada à função composta, não foi prevista por mim durante a elaboração do plano de aula, tendo sido necessário alertar os alunos para esta situação.

Para esta aula, estava ainda contemplado a resolução de uma ficha de trabalho com exercícios de carater mais analítico. Contudo, devido ao tempo demorado, que mais uma vez, os alunos levaram na resolução da ficha de trabalho sobre a reflexão, não foi possível iniciar a ficha de trabalho prevista para os últimos 15 minutos da aula.

No entanto, penso que os objetivos de aprendizagem relativos à função par e ímpar foram alcançados, tendo verificado que os alunos conseguiram estabelecer relação entre a função par e ímpar e as transformações de reflexão associadas.

3.7.6. Aula 6: dia 4 de maio

A aula do dia 4 de maio teve uma natureza mais prática, tendo sido feitos exercícios mais analíticos. Nesta aula, ao contrário das anteriores, os alunos tiveram um papel menos autónomo. Como a presente aula tinha apenas 45 minutos de duração e de forma a conseguir cumprir com todos os objetivos para esta aula, optei por resolver os exercícios no quadro em conjunto com a turma.

Assim sendo, tal como estava planeado, iniciei a aula com uma breve síntese, acompanhada de um esquema feito no quadro por mim, no qual procurei rever todas as transformações geométricas trabalhadas. Seguidamente foi feita uma correção do trabalho de casa, que tinha sido proposto na aula do dia 30 de abril, e que como muitos alunos não tinham realizado, optei por fazer a correção do mesmo nesse dia.

Ao longo da realização da ficha, houve um momento em que um dos alunos colocou-me uma dúvida relativa ao primeiro exercício da ficha, tendo ficado algum tempo a esclarecer o aluno. Desta forma, não foi possível terminar a ficha de trabalho na totalidade, tal como o plano de aula contemplava. Os restantes exercícios que não foram realizados foram propostos aos alunos para trabalho de casa.

3.7.7. Aula 7: dia 7 de maio

A aula do dia 7 de maio, foi, uma continuação da aula anterior. Como não tinha sido possível resolver a ficha n.º 7 na aula anterior, esta foi realizada nesta aula. Mais uma vez, os tempos previstos para cada momento de aula não foram cumpridos devido ao facto de os alunos revelarem dificuldades que me pareceram importantes esclarecer. Esta aula era a penúltima aula da minha lecionação, sendo a aula seguinte destinada à resolução de uma ficha de avaliação. Desta forma, optei por resolver alguns exercícios sobre todas as transformações geométricas de gráficos de funções abordadas ao longo da minha lecionação.

A aula foi iniciada com os exercícios que foram propostos para casa na última aula, tendo solicitado a dois alunos que os resolvessem no quadro. Antes de iniciar a resolução de exercícios para esta aula, expliquei oralmente o que cada aluno tinha feito em cada exercício. Não dei oportunidade aos alunos de explicarem, pois devido à falta de tempo, tal opção poderia ter demorado mais.

Ao longo da aula verifiquei que os alunos, tal como observado nas resoluções que os mesmos me entregaram nas aulas anteriores, ainda apresentavam dificuldades relativas à transformação da contração e dilatação perante a representação algébrica, não conseguindo identificar através da expressão analítica a transformação efetuada ao gráfico. Este aspeto foi tido em conta durante a realização do plano de aula, tendo optado por fazer em conjunto com a turma um exercício sobre este tipo de transformação.

Além deste exercício, ainda estava contemplado a realização de mais dois exercícios, tendo só havido tempo para a realização de um deles. Este, tal como mencionado no plano de aula, foi realizado de forma autónoma pelos alunos, sendo a sua correção feita logo de seguida aos mesmos terminarem. Apesar de o tempo não ser muito, optei por deixar os alunos trabalhar autonomamente, possibilitando os mesmos de pensarem por si, tirando as suas próprias conclusões, e tomarem consciência das suas dificuldades. O tempo previsto para este momento de aula não foi cumprido. Poderia ter optado por encurtar o tempo de trabalho autónomo, contudo optei por não o fazer, por considerar estes momentos importantes para a aprendizagem dos alunos.

Penso que a aula foi positiva, tendo-se verificado, de uma forma geral, o cumprimento dos objetivos esperados para esta aula. Contudo houve alguns aspetos negativos. Um deles foi o facto de ter ficado muito tempo junto de um aluno a esclarecer algumas dúvidas que este me apresentou, acabando por não estar atenta à restante turma. Durante este momento, houve alguns alunos que acabaram por estar à minha espera para esclarecimento de dúvidas, atrasando o seu trabalho e, consequentemente, o tempo previsto por mim para este momento de trabalho autónomo.

Capítulo 4

Métodos e procedimentos de recolha de dados

O presente capítulo pretende focar-se nos métodos e procedimentos utilizados ao longo do estudo com o objetivo de recolher dados para que, posteriormente, pudessem ser analisados.

4.1. Opções metodológicas

O objetivo central deste estudo é analisar a compreensão que os alunos do 10.º ano revelam sobre o tópico das transformações geométricas dos gráficos de funções. Sendo a compreensão um aspeto tão crucial neste estudo, foi utilizada uma metodologia de natureza interpretativa e uma abordagem qualitativa. Ao longo da investigação realizada durante a lecionação da subunidade de ensino em causa, a observação dos participantes, neste caso os alunos, e a interação que estabeleci com eles ao longo das aulas constituíram-se elementos centrais para aceder à compreensão dos alunos dos conceitos em estudo. A abordagem qualitativa está presente neste estudo através de "uma grande variedade de técnicas de recolha de dados como materiais empíricos" (Aires, 2011, p. 13), como é o caso da entrevista e da observação, aspetos também defendidos por Bogdan e Biklen (1994). A investigação qualitativa é ainda caracterizada pela sua "perspetiva multimetódica que envolve uma abordagem interpretativa e naturalista do sujeito de análise" (Denzel & Lincoln, 1994 citados em Aires, 2011, p. 14). Bogdan e Biklen (1994) associam a investigação de natureza naturalista quando o investigador frequenta o local onde é possível observar-se diretamente os fenómenos que estão a ser estudados, aspeto que está bastante presente no meu estudo ao ser, em simultâneo, professora e investigadora no mesmo espaço, neste caso a sala de aula.

Outro aspeto característico de uma abordagem qualitativa é o interesse pelo processo ao invés do produto (Bogdan & Biklen, 1994). Desta forma, foquei-me na compreensão da forma como os alunos pensavam, preocupando-me essencialmente com o processo de resolução que seguiam e não tanto com o produto final que estes me apresentavam. Esta preocupação em aceder ao raciocínio dos participantes foi uma constante ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Durante a minha intervenção fui também recolhendo as resoluções das tarefas propostas pelos alunos e os correspondentes ficheiros do Geogebra. Desta forma, os dados recolhidos estão sob forma de palavras e imagens. Além disso, a análise realizada aos dados recolhidos inclui transcrições das entrevistas realizadas aos participantes de modo a "ilustrar e substanciar a apresentação" (Bogdan & Biklen, 1994, p.48). Uma vez que, "o significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50) e, visto o presente estudo estar tão direcionado para a compreensão que os alunos revelam sobre este tópico, a entrevista assume também um papel relevante neste estudo, de modo a conhecer os significados que estes atribuem às diferentes transformações de funções.

Assim sendo, a componente descritiva que é característica de uma investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) está também presente neste estudo, na medida em que, recorrendo a dados que provêm destes diferentes tipos de métodos de recolha, os resultados são apresentados recorrendo a citações que provêm diretamente dos dados, de forma a sustentar a interpretação que é realizada.

4.2. Participantes do estudo

Dada a complexidade associada à análise das resoluções da totalidade dos 15 alunos da turma, optei, para a realização deste estudo, por elaborar dois estudos de caso, cada um composto por dois alunos. Creswell (2012) defende que os estudos de caso possibilitam o acesso a processos e resultados, permitindo uma maior compreensão através de "descrições e explicações mais poderosas" (p. 45). Desta forma, a escolha feita pretendeu que conseguisse ter acesso à maior informação possível, de modo a fundamentar o estudo em causa (Aires, 2011). Além disso, procurei selecionar os quatro participantes a "partir de critérios específicos" (Aires, 2011, p. 22). Os participantes do estudo foram selecionados segundo os seguintes critérios: disponibilidade voluntária em participar no estudo; boa capacidade de comunicação, tanto com a professora, como com os colegas; boa capacidade em exprimir os seus raciocínios de forma clara e heterogeneidade relativamente ao conhecimento que revelam da disciplina de matemática.

Seguidamente apresento os dois pares de alunos escolhidos por mim:

- Júlio e Maria, ambos de 16 anos, são um par heterogéneo relativamente ao nível de aprendizagem na disciplina de matemática. Júlio, no 1.º período, obteve uma classificação de 8 valores e no 2.º período subiu para 10 valores, mantendo-se com esta última classificação no 3.º período. O aluno apresenta muitas dificuldades na disciplina de Matemática, verificando-se, durante as aulas, momentos em que está mais empenhado que outros. Maria obteve 14 valores de classificação no 1.º e 2.º período, tendo descido para 13 valores no terceiro período. É uma aluna empenhada, trabalhadora e participativa. Júlio e Maria, numa determinada altura do ano estiveram sentados um ao lado do outro, tendo verificado que ambos trabalhavam bem juntos.
- Luís e Martim, de 16 anos e 15 anos respetivamente, formam um par heterogéneo relativamente ao desempenho que revelam na disciplina de Matemática. Luís obteve uma classificação de 10 valores no 1.º e 2.º período, subindo para 11 no 3.º período. Luís revela algumas dificuldades na disciplina de Matemática, contudo trabalha e empenha-se muito para superar as mesmas. Martim é o aluno com melhores classificações dentro da turma, tendo tido uma classificação de 17 valores no 1.º período, 16 no 2.º e 18 no 3.º período. É um aluno empenhado, bastante participativo e com vontade em expor as suas ideias. Luís e Martim ficaram sentados um ao lado do outro ao longo de todo o ano letivo na disciplina de Matemática, tendo mostrado que trabalham muito bem os dois juntos.

Para que as questões de ordem ética fossem respeitadas e de forma a que os participantes não saíssem de forma alguma prejudicados, todos estes foram informados sobre o objetivo do estudo e que a sua identidade não seria revelada, sendo fictícios os nomes utilizados ao longo do relatório. Foi também assegurado aos alunos que a utilização dos dados recolhidos rege-se pelo princípio da confidencialidade e privacidades (IEUL,2016).

Na sequência de um projeto realizado no 1.º período, no qual a turma do 10.º ano esteve envolvida, foi necessário pedir autorizações à Direção Pedagógica e aos Encarregados de Educação dos alunos para recolher dados (anexo 7). Nesta estava incluído o objetivo do estudo e a garantia de que a privacidade de cada aluno estaria preservada, podendo a qualquer momento desistir, caso assim o entendessem (IEUL,2016). A investigação que decorre deste estudo previne, igualmente, situações que prejudiquem a integridade dos participantes (IEUL,2016).

O consentimento informado e a garantia de proteção dos participantes contra qualquer aspeto que os possa prejudicar procuram garantir que os participantes adiram de forma voluntária ao projeto de investigação (Bogdan & Biklen, 1994). Assim sendo, os alunos consentiram em participar, de forma voluntária, neste estudo.

4.3. Métodos de recolha de dados

Com vista a obter dados que me permitissem dar resposta ao objetivo deste estudo, tornou-se fundamental definir os métodos de recolha de dados. Assim sendo, optei por métodos que me permitissem ter acesso a informação relativa ao raciocínio dos alunos e, consequentemente ao processo que estes desenvolvem aquando do trabalho desenvolvido com as transformações de gráficos de funções. Para que me fosse possível analisar de forma minuciosa os aspetos mencionados anteriormente recorri aos seguintes métodos: observação das aulas, com registos de áudio e vídeo, recolha documental e, por fim, a realização de uma entrevista.

4.3.1. Observação das aulas

A observação participante foi um aspeto presente ao longo da minha intervenção, enquanto professora e investigadora. Esta é "o processo de reunir informações abertas e de primeira mão, observando pessoas e lugares num local de pesquisa" (Creswell, 2012, p.214). O termo participante advém do facto de "assumir um papel de observador 'interno' que se envolve nas atividades do local de estudo" (Creswell, 2014, p.214). Aires (2011) concorda com Creswell (2012) ao defender que a observação possibilita obter "uma visão mais completa da realidade" (p. 25) de forma a que se possa associar a informação que advém da comunicação entre os sujeitos com o objetivo que está a ser estudado. Como os alunos trabalhavam em grupo foi possível observar, em certa medida, as perceções que cada um tinha do tema em questão através da comunicação que estabeleciam uns com os outros.

No entanto, o processo de observador participante poderá ter vantagens e desvantagens associadas. Por um lado, a observação permite registar informações a partir de um cenário real (Creswell, 2012), neste caso a sala de aula. Por outro lado, exige uma "atenção cuidadosa aos detalhes visuais" (Creswell, 2012, p. 214) que como professora nem sempre consegui concretizar devido a facto de ter de estar atenta a uma turma inteira. Deste modo, recorri a um diário de bordo que me permitiu ir registando alguns momentos mais importantes que me ajudariam, mais tarde, na análise de dados e, consequentemente, na reflexão que como professora devo ter a fim de melhorar a minha abordagem e gerir o processo de ensino e aprendizagem. Além dos registos feitos por mim, a minha colega da prática de ensino supervisionada foi também fazendo alguns registos que me facultou posteriormente e que contribuíram para a construção do diário de bordo.

Adicionalmente, os registos de áudio e vídeo constituíram-se elementos cruciais na observação. Estes permitiram-me ter acesso a pormenores que como observadora não consegui captar tão bem, assim como ajudar-me a refletir sobre a minha prática de ensino.

Utilizei dois gravadores de áudio ao longo das aulas que foram colocados apenas junto dos dois pares que foram alvo do objeto de estudo em causa. Já o registo de vídeo foi realizado sobre toda a turma durante os momentos de trabalho coletivo e as discussões em grupo turma realizadas. Enquanto que o registo de áudio permitiu-me ter acesso a alguns dos raciocínios que os alunos iam desenvolvendo e partilhando com os colegas durante a realização do trabalho autónomo, o registo de vídeo proporcionou-me captar melhor as discussões realizadas em grupo turma.

4.3.2. Recolha documental

Segundo Creswell (2012) os documentos constituem uma fonte de dados fidedigna que tem a possibilidade de "estar na linguagem e nas palavras dos participantes" (p. 223). Assim sendo, no final de cada aula recolhi todas as resoluções dos alunos a fim de poder dar-lhes feedback, aspeto presente na avaliação implementada ao longo da minha intervenção, e poder ter acesso aos raciocínios e representações que os alunos iam construindo. Além do mais permitiu-me ainda, como professora, ter consciência das aprendizagens e dificuldades que os alunos iam revelando. Os ficheiros Geogebra resultantes do trabalho dos alunos foram também recolhidos por mim.

A ficha de avaliação (anexo 4) proposta aos alunos teve como foco principal avaliar a progressão dos alunos, ao mesmo tempo que foi utilizada para recolher dados que me permitissem dar resposta às questões de estudo deste relatório. Ao mesmo tempo, e porque a subunidade lecionada por mim não se focou essencialmente nos aspetos que dizem respeito às questões deste estudo, incluí neste momento de avaliação, exercícios que envolvem outros tópicos, tais como a função par e ímpar. Deste modo, irei considerar apenas as questões 1,2 e 3 da primeira parte e a questão 1 da segunda parte para a análise de dados. Apesar de as questões da primeira parte serem de escolha múltipla foi pedido aos alunos que justificassem cada uma das suas opções, de forma que pudesse compreender como tinham pensado para dar resposta às questões.

4.3.3. Entrevista

Tendo em conta o objetivo do estudo em causa, a entrevista constitui-se um método de recolha de dados fundamental, na medida em que permite ao investigador ter acesso às perspetivas e ideias dos participantes (Bogdan & Biklen, 1994). Desta forma, a entrevista realizada tornou-se um complemento essencial aos outros métodos de recolha de dados já utilizados.

De forma a que fosse possível obter mais informações sobre o tópico que é alvo de estudo neste relatório, optei por realizar duas entrevistas, uma a cada par de alunos. Estas eram do tipo clínico pois tinham como objetivo a compreensão das competências matemáticas dos alunos (Hunter, 1997), no tema das transformações geométricas dos gráficos de funções. As entrevistas foram semi-estruturadas, na medida em que realizei as mesmas com um guião (anexo 6.1.) que me apoiou mas que poderia sofrer alterações no decorrer das mesmas, consoante as respostas que os alunos me iam fornecendo.

A entrevista seguiu um guião (anexo 6.2.) e foi realizada aos dois pares de alunos, em dias diferentes. Esta teve como principal objetivo aceder à compreensão que os alunos revelaram das transformações de gráficos de funções, indo ao encontro das questões de estudo do presente relatório. Os alunos selecionados realizaram a entrevista durante uma parte da sua hora de almoço.

No decorrer da entrevista, os alunos tiveram acesso à calculadora gráfica em uma das questões. Este material foi utilizado apenas na questão 1 com o objetivo de os alunos verificarem graficamente as respostas que tinham fornecido, refletindo sobre as suas próprias conclusões. Esta entrevista foi ainda gravada com o gravador de áudio, sendo os alunos informados de tal procedimento.

A entrevista era constituída por questões matemáticas para as quais era dado tempo aos alunos para responderem por escrito, sendo a justificação feita oralmente. A questão n.º 4, devido à falta de tempo, acabou por ser quase toda respondida exclusivamente de forma oral por ambos os pares de alunos.

Com a primeira questão, pretendia que os alunos identificassem a transformação que permite deslocar o gráfico de f duas unidades para a direita. Estando esta deslocação associada à translação horizontal, procurei que os alunos fossem capazes de identificar o vetor que estaria associado à transformação em causa, assim como que estes explicassem por palavras suas que mudanças ocorreriam ao gráfico da função. Nesta questão ainda procurei que os alunos indicassem a expressão algébrica associada ao gráfico transformado, para que conseguisse perceber como estes estabelecem a relação entre a expressão algébrica e a transformação efetuada ao gráfico.

A segunda questão da entrevista, direcionada para a *translação vertical*, pretendia que os alunos interpretassem ambos os gráficos e identificassem a transformação ocorrida ao gráfico original e a expressão algébrica da função transformada. A questão 3 tinha como principal objetivo recorrer à visualização e identificar a transformação que ocorria ao gráfico de f, tendo em conta os gráficos representados e as informações que eram fornecidas. Ao mesmo tempo, era esperado que os alunos fossem capazes de identificar a expressão analítica da nova função. Como esta envolvia o coeficiente associado à transformação em causa, optei por propor o exercício de modo a que o aluno tivesse que descobrir o respetivo coeficiente.

A questão 4 tinha como principais objetivos a identificação da transformação ocorrida ao gráfico da função f perante a expressão algébrica da nova função correspondente ao gráfico que foi transformado do gráfico de f. Ao mesmo tempo, pretendi que os alunos fossem capazes de indicar o que acontecia ao gráfico de f ao ser submetido a cada uma das transformações. Este último aspeto, referente às alterações que ocorriam do gráfico de f para o seu transformado, não foi tão explorado na entrevista devido ao pouco tempo que restou.

4.4. Processo de análise de dados

Para proceder à análise de dados, ao longo da minha intervenção, fui recolhendo e digitalizando as resoluções das fichas de trabalho que os alunos realizavam em sala de aula. Assim sendo, as resoluções dos alunos participantes do meu estudo foram alvo de análise, bem como os ficheiros Geogebra, os registos de áudio realizados durante as aulas e as entrevistas efetuadas.

De modo a responder às questões que são alvo de estudo neste relatório, selecionei algumas questões de três fichas de trabalho realizadas em aula, cada uma referente a uma transformação. Deste modo, optei pelas questões seguintes:

- Ficha de trabalho n.º1: $1\ c)i), 1e)\ e\ 2a)i)$
- Ficha de trabalho n.º3: $1d), 1e)i), 2b)$ e $2c)i)$
- Ficha de trabalho n.º5: $1d)ii), 1d)iv), 2iii)$ e $2v)$

Para complementar as informações recolhidas nas questões mencionadas anteriormente, recorri a alguns dos ficheiros Geogebra.

A análise de dados foi dividida em duas grandes secções, referentes aos dois casos em estudo: Júlio e Maria, Luís e Martim. Ao analisar cada par foquei-me nas questões acima mencionadas das fichas de trabalho, na ficha de avaliação e na entrevista realizada. De forma a poder organizar a informação recolhida para cada transformação, dividi as questões analisadas pelas quatro transformações, criando assim subtítulos incluídos nos dois estudos de caso: Translação, Contração e Dilatação e Reflexão.

Capítulo 5

Análise de dados

O presente capítulo tem como principal intenção fornecer elementos para dar resposta às questões de estudo consideradas neste relatório. Este capítulo encontra-se dividido em dois subcapítulos que correspondem aos dois estudos de caso analisados por mim: o primeiro corresponde ao Júlio e a Maria e o segundo ao Luís e o Martim.

5.1. Júlio e Maria

5.1.1. Translação vertical e horizontal

Ficha de Trabalho n.º1 *(*anexo 2.1.**)**

A questão 1) $c)i)$ da ficha de trabalho n.º 1 tem como objetivo levar o aluno a identificar as alterações que ocorrem depois de o gráfico de f ser deslocado. Esta questão foi resolvida pelos alunos com a ajuda do Geogebra, sendo esta questão respondida visualizando o gráfico neste software.

Júlio, afirmou que "Ocorreu que houve uma deslocação do gráfico para baixo, e passou a haver 2 zeros". Maria, por sua vez, identificou as seguintes alterações: "Aumentou o número de zeros, o vértice da função muda e o contradomínio também". A figura 5 corresponde ao ficheiro Geogebra que Maria e Júlio utilizaram para representar a função solicitada na ficha de trabalho. De facto, ambos identificam uma alteração que decorre da transformação que é efetuada ao gráfico de f e que corresponde ao número de zeros. A função f tem apenas um zero e, a sua transformada ao ser deslocada para baixo quatro unidades, passará a ter dois zeros.

Maria, além deste último aspeto que identificou, afirmou que o contradomínio também se alterava. Este aspeto decorre do facto do vértice da parábola correspondente ao gráfico da função cujo gráfico foi transformado se alterar em relação ao da função

f. Desta forma, a aluna percebeu que o mínimo absoluto da função f não é o mesmo do da função que é representada pelo gráfico transformado.

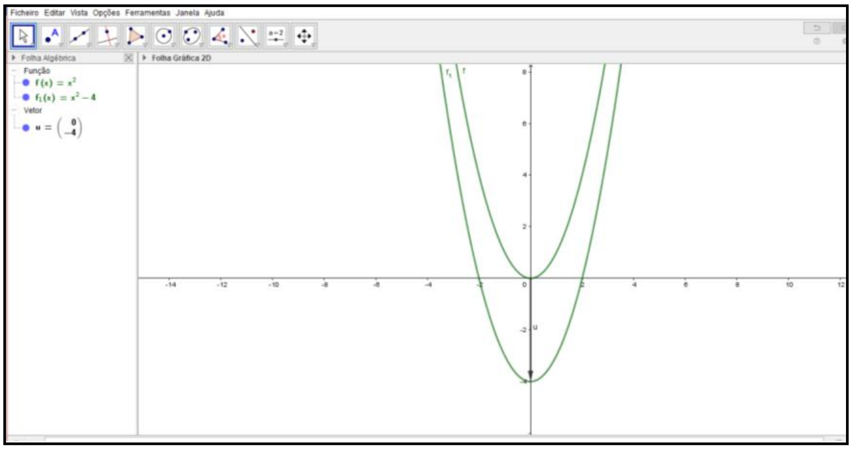


Figura 5 – Resolução do Júlio e da Maria da questão $1c)i)$ da ficha de trabalho n.º1

Recorrendo aos registos de áudio realizados durante as aulas, pude verificar que, apesar do ficheiro de Geogebra dos alunos (figura 5), mostrar que os mesmos deslocaram o gráfico de f segundo o vetor $(0, -4)$, estes não o fizeram utilizando a abordagem do vetor. De facto, Júlio e Maria concluíram de imediato que para deslocar o gráfico 4 unidades para baixo, basta subtrair quatro unidades à expressão algébrica de f.

As questões $e)i)$ e $e)ii)$ que pretendiam que os alunos recorressem à representação numérica, são aqui analisadas para perceber como os alunos compreendem a translação em casos mais particulares. De seguida apresento as figuras 6 e 7 que correspondem às resoluções de Maria e Júlio.

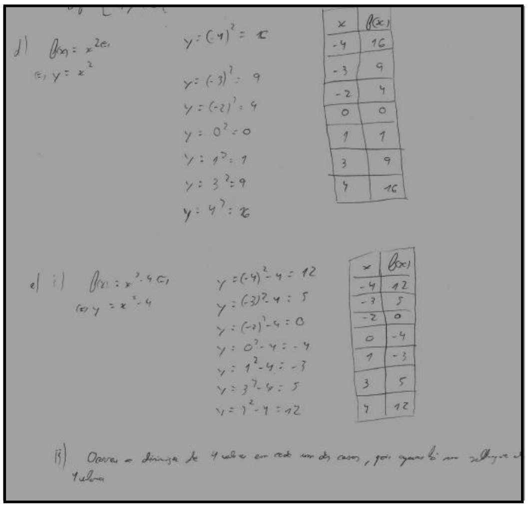


Figura 6 – Resolução de Júlio das questões $e)i)$ e $e)ii)$ da ficha de trabalho n.º1

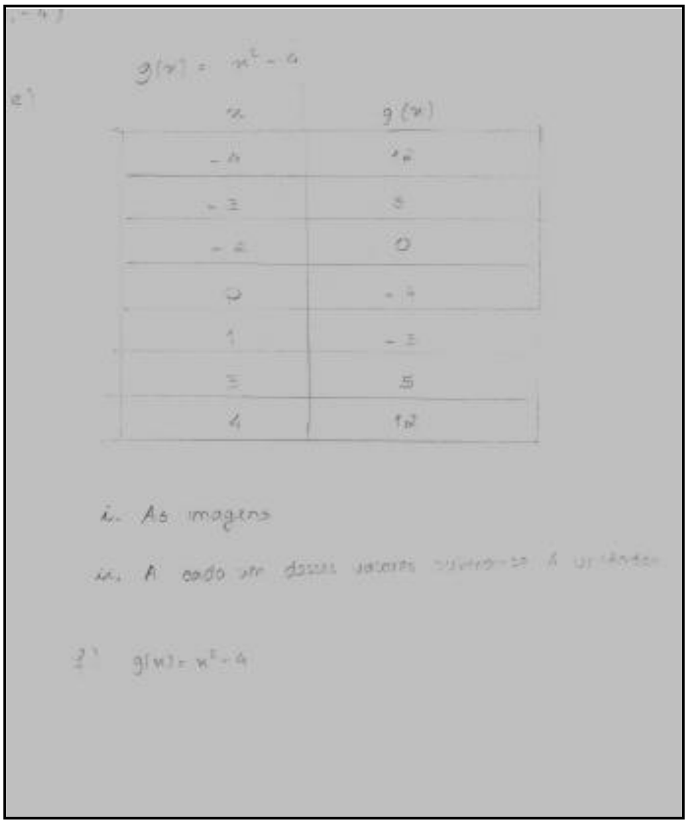


Figura 7 – Resolução da Maria das questões $e)i)$ e $e)ii)$ da ficha de trabalho n.º1

Maria e Júlio construíram, sem dificuldades, as tabelas pedidas e foram capazes de perceber que as imagens da função transformada diferem relativamente às da função f. Júlio em conversa com Maria afirmou que "iria dar -4 em cada um".

A questão $2a)i)$ relativa à translação horizontal, tinha, tal como na primeira parte desta ficha de trabalho, o objetivo de os alunos identificarem as diferenças entre o gráfico de f e o seu gráfico transformado, depois de os visualizarem no Geogebra (figura 8).

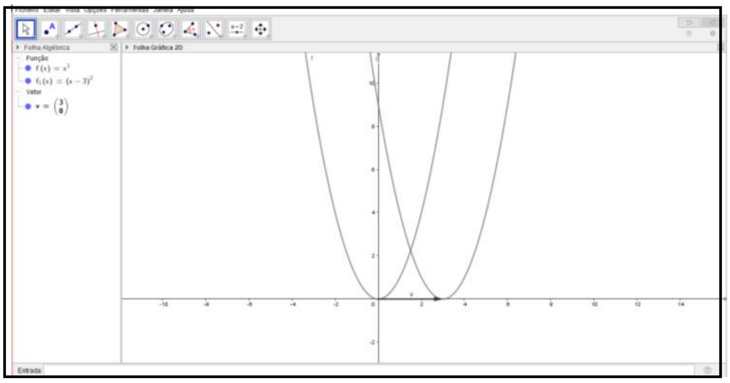


Figura 8 – Exploração do Júlio e da Maria da questão $2a)i)$, no Geogebra

Júlio, em comparação com a função inicial, identificou uma mudança no zero da função representada pelo gráfico transformado. Contudo, este identificou que as imagens se iriam alterar, tal como a figura 9 mostra.

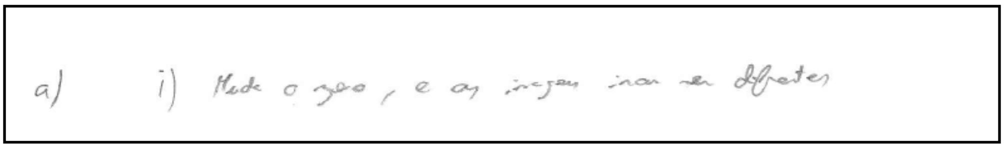


Figura 9 – Resolução de Júlio da questão $2a)i)$ da ficha de trabalho n.º1

Maria, tal como o seu colega, mencionou que os zeros se alterariam. Além disto, a aluna ainda mencionou uma alteração no vértice do gráfico da função e nos objetos, tal como pode ser visto na figura 10.

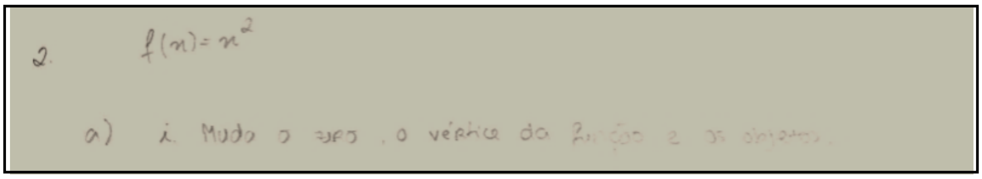


Figura 10 – Resolução da Maria da questão $2a)i)$ da ficha de trabalho n.º1

Júlio mostra alguma dificuldade em perceber que perante a transformação, à qual o gráfico foi submetido, os objetos da função referente ao gráfico transformado é que serão alterados e não as imagens, tal como o aluno referiu. Maria, por seu turno, revela, na sua resposta, algumas dificuldades relativas à linguagem matemática. Esta refere-se ao vértice como sendo da função e não do gráfico. Apesar disso, a aluna consegue perceber que esta transformação irá alterar os objetos em relação à função f.

Ficha de Avaliação (anexo 4)

Na primeira questão, a justificação de Júlio, tal como a seguinte figura 11 mostra, não é muito esclarecedora relativamente à escolha da expressão analítica e da transformação em causa. Júlio apenas explica o que irá acontecer ao gráfico da função depois de este ser deslocado segundo o vetor $\vec{u}(5,0)$, sem o relacionar com a expressão analítica escolhida.

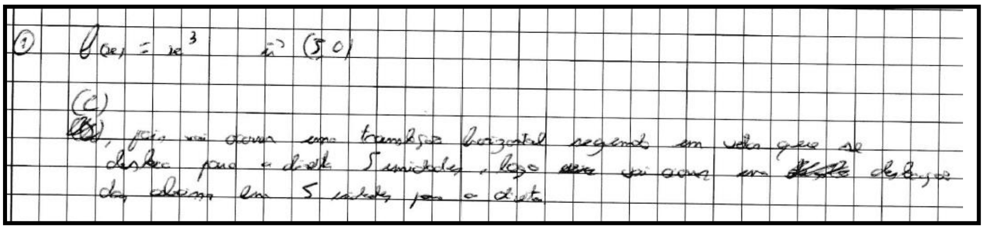


Figura 11 – Resolução de Júlio da questão 1 da ficha de avaliação

No que diz respeito à resolução de Maria, esta vai ao encontro do que a sua intuição a leva a pensar, destacando que se o gráfico é deslocado cinco unidades para a direita então os objetos da função serão adicionados a cinco unidades (Figura 12).

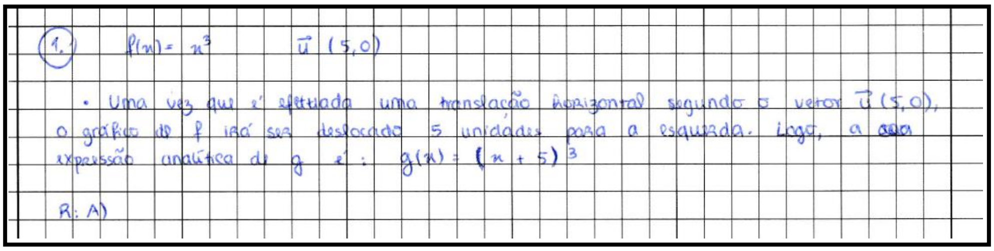


Figura 12 – Resolução da Maria da questão 1 da ficha de avaliação

Entrevista (anexo 6.1.)

Em resposta à primeira questão, Maria e Júlio foram capazes de identificar a transformação em causa, apesar de a linguagem que utilizaram não ser a mais correta. Maria identificou "que o gráfico de f é deslocado duas unidades para a direita e vai sofrer uma translação horizontal segundo o vetor $(2,0)$ e, portanto, a expressão analítica vai ser $x^3 + \frac{1}{2}x - 2$". Júlio, por sua vez, utilizou termos respeitantes à translação pouco corretos, tal como pode ser confirmado no excerto seguinte da entrevista:

Professora Marisa: Como pensaste Júlio?

Júlio: Eu disse que ocorria uma translação segundo o eixo O_x de $(2{,}0)$.

É visível que Júlio apresenta algumas dificuldades em relação à linguagem, referindo-se ao eixo O_x, em vez de associar a transformação apenas ao vetor identificado corretamente. Quando questionado por mim sobre o tipo de translação, Júlio afirmou de imediato que se tratava de uma translação horizontal.

Relativamente à expressão algébrica, ambos revelaram dificuldades em indicar corretamente a expressão pretendida. Maria indicou uma expressão que não correspondia à transformação que tinha identificado anteriormente:

Maria: Eu penso que seja $g(x) = x^3 + \frac{1}{2}x - 2$.

Maria ao explicar como tinha pensado, apenas disse que "-2 é porque quando ele se desloca para a direita o sinal é negativo, fica -2". A aluna não se apercebeu que a forma como escreveu a expressão algébrica traduzir-se-ia numa translação vertical, e não horizontal. Ao mesmo tempo, não soube explicar a relação existente entre o sinal da constante que considerou com a sentido da translação horizontal, mostrando que recorre à memorização.

Por seu turno, Júlio indicou que a expressão analítica é "$g(x) = -2x^3 + \frac{1}{2}x \times (-2)$, porque ocorre uma translação nos objetos". Tal como a sua colega, Júlio não se apercebeu inicialmente que a expressão que considerava não reproduziria a transformação esperada.

Em seguida, ao recorrerem à calculadora gráfica, Júlio e Maria, perceberam o que fizeram de errado à expressão algébrica que tinham indicado. O seguinte excerto descreve este momento:

Maria: A minha [função] deslocou-se verticalmente.
Professora Marisa: E a translação que identificaste era de que tipo?
Maria: Horizontal.
Professora Marisa: O que aconteceu ao teu gráfico [Júlio]?
Júlio: Ocorreu uma reflexão, porque estava $-2x$.

Maria compreendeu de imediato que a expressão algébrica que tinha considerado fazia com que o gráfico se movesse verticalmente, enquanto João verificou que ocorria uma reflexão, sem ter mencionado que ao multiplicar por 2 também ocorreria uma dilatação vertical de coeficiente 2. Perante esta situação optei por dar mais tempo para ambos os alunos pensarem como poderia ser a expressão da função transformada. De seguida, apresento um pequeno excerto da entrevista que descreve este momento:

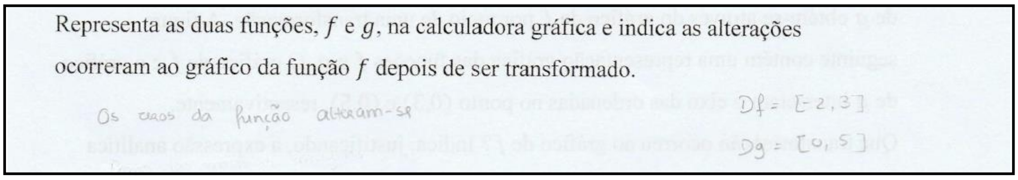
> **Professora Marisa:** Como será então?... (Júlio não consegue chegar a uma conclusão)…Então se o gráfico se desloca para a direita então temos o vetor $\vec{u}(2,0)$, certo? Que já identificaste. Então como será a expressão? Se deslocas duas unidades o que vai acontecer às tuas abcissas dos pontos?
> **Júlio:** Vão somar…ah…Vão subtrair duas unidades.

Depois deste diálogo entre mim e Júlio, este acabou por ficar um pouco confuso. Primeiramente, quando interpelado por mim sobre o que aconteceria às abcissas dos pontos quando o gráfico de f se deslocara segundo o vetor considerado, afirma que estas vão ser adicionadas a algo. Contudo, Júlio volta atrás e acaba por declarar que afinal serão subtraídas. É aqui visível que existe dificuldade em perceber que mudanças ocorrerão ao argumento da função f depois de esta ser transformada. No meu entender, o aluno pensou que como o gráfico de f é deslocado para a direita, os novos pontos criados terão as mesmas ordenadas, mas as abcissas corresponderão às do gráfico de f adicionadas de duas unidades. Desta forma, Júlio pensou que o mesmo iria acontecer aos objetos da função transformada, adicionando duas unidades ao argumento de f. Júlio não foi capaz de compreender que esta última situação não iria permitir produzir os pontos nas condições descritas acima, ou seja, pontos que mantivessem a mesma imagem ao serem transformados e abcissas adicionadas de duas unidades. Por sua vez, Maria conseguiu identificar corretamente a expressão da nova função.

Ao interpelá-los acerca das alterações que ocorreriam ao gráfico através desta transformação, em relação ao gráfico da função inicial, Júlio e Maria começaram por mencionar que os zeros da função alterar-se-iam mas que nem o domínio e o contradomínio sofreriam alterações, visto ambos coincidirem com o conjunto $\mathbb{R}$. Contudo, Maria ao responder a esta questão realçou que, no caso em que o domínio da função f é limitado, haveria mudanças no domínio da função correspondente ao gráfico transformado. Seguidamente, apresento o excerto da entrevista relativa a este momento.

Professora Marisa: Que alterações identificam?
Júlio: O zero é diferente.
Professora Marisa: Ou seja, os zeros da função são diferentes…Sim. Mais?
Maria: Neste caso, o domínio não se altera porque o domínio é $\mathbb{R}$, certo?
Professora Marisa: Exatamente! O domínio não se altera porque é $\mathbb{R}$.
Maria: Mas, por exemplo, se restringíssemos o domínio…
Professora Marisa: Calma! Mas podes justificar isso. Júlio mais modificações que identificaste? Portanto, os zeros alteram-se, o domínio mantém-se porque é $\mathbb{R}$.
Júlio: O contradomínio não se altera porque é $\mathbb{R}$.
Professora Marisa: Exatamente!...Mais alguma [alteração]? Então vamos supor que o domínio é $[-2,3]$. O domínio vai ser limitado. Com será o nosso domínio da função transformada?
Júlio: $[0,5]$
Professora Marisa: Concordas Maria?
Maria: Sim!

Maria, assim que foi questionada acerca do domínio da função transformada, enfatizou o caso em que o domínio é limitado e que, nesse caso, não coincidiria com o conjunto $\mathbb{R}$. Como uma das questões adicionais que fiz aos alunos, mais à frente, tinha a ver com o caso em que o domínio é limitado, optei por não deixar Maria explicar essa situação, nesse momento. No entanto, Júlio acabou por identificar que o contradomínio também não se alteraria. Tal como o diálogo descrito acima mostra, nesta altura questionei os alunos acerca do caso em que o domínio era limitado, de $[-2,3]$. Júlio identificou de imediato a transformação do domínio e Maria concordou, registando por escrito a sua resposta, tal como mostra a figura 13.


Representa as duas funções, f e g, na calculadora gráfica e indica as alterações ocorreram ao gráfico da função f depois de ser transformado.

Os zeros da função alteram-se

$Df = [-2,3]$

$Dg = [0,5]$

Figura 13 – Resolução da Maria da questão 1 da entrevista

Na segunda questão da entrevista, Júlio e Maria identificaram de imediato a transformação ocorrida e a expressão analítica do gráfico de g. Ao justificar a expressão analítica, Júlio mencionou logo com a transformação que identificou, neste caso, a translação vertical segundo o vetor $(0,3)$ e que o gráfico apenas se deslocava para cima, não havendo alteração nas ordenadas dos pontos relativamente ao gráfico de f. Maria concordou com o seu colega, tendo feito o mesmo raciocínio. O excerto seguinte comprova isso mesmo:

> **Professora Marisa:** Então Júlio porque é que pensaste que $g(x) = x^3 + 3$?
> **Júlio:** Porque ocorre uma translação vertical segundo o vetor $(0{,}3)$ e o gráfico apenas se desloca para cima.
> **Professora Marisa:** Maria, e tu como pensaste?
> **Maria:** Exatamente como o Júlio.

Como Maria tinha desenvolvido mais a sua resposta escrita durante a entrevista, optei por não insistir com a mesma para a justificação desta questão. A figura seguinte 14 mostra a resolução apresentada por esta aluna.

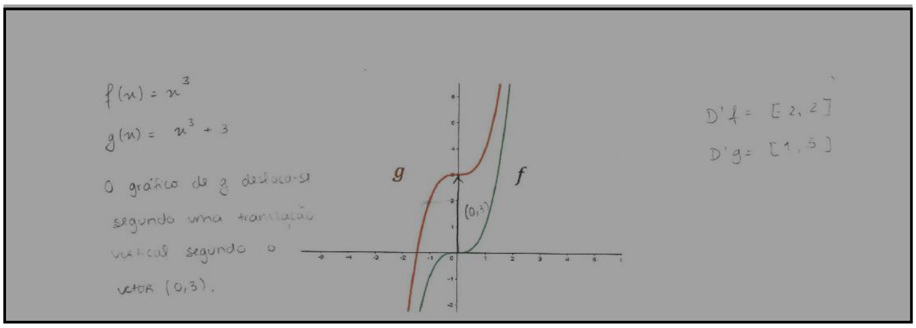


Figura 14 – Resolução da Maria da questão 2 da entrevista

Júlio e Maria, de seguida, foram questionados por mim sobre as alterações que ocorreriam ao gráfico quando é transformado por meio da translação vertical. Júlio começou por indicar que o zero da função se alteraria e que o domínio e o contradomínio da função manter-se-iam. Maria apenas referiu que as ordenadas dos pontos do gráfico de g alterar-se-iam relativamente às ordenadas dos pontos do gráfico de f. Mais uma vez, coloquei os alunos perante a situação em que a função f, a função inicial, teria o contradomínio limitado. Tanto Júlio como Maria identificaram corretamente o contradomínio da função g, a partir da observação do gráfico transformado.

A alínea a) da questão 4 envolvia dois tipos de transformação: a translação horizontal e a translação vertical. Júlio e Maria conseguiram identificar corretamente as duas transformações associadas, contudo Júlio, mais uma vez, revelou ter dificuldades em expressar corretamente a transformação, afirmando que existia uma "translação vertical segundo o eixo O_y", tal como tinha acontecido na questão 1. Maria identificou corretamente a transformação e o vetor associado, tanto na translação vertical como na horizontal.

Por fim, a alínea $c)$, que envolvia a translação vertical e a contração horizontal, Júlio e Maria conseguiram reconhecer a translação vertical. No entanto, Júlio afirma que esta translação é efetuada segundo o vetor (0,4), ficando um pouco confuso quando a sua colega afirma que o vetor associado é o vetor $(0,-4)$. Júlio fica, por momentos, a pensar acabando por perceber que a sua colega estava certa, dizendo que "estava a pensar como se fosse no x". É possível verificar que Júlio recorre à memorização, concebendo a ideia que só quando existem alterações no argumento da função é que se trata da operação é inversa.

5.1.2. Contração e dilatação vertical e horizontal

***Ficha de Trabalho n.º 3* (** anexo 2.3.)

A questão $1d)$ e $e)$, relativas à dilatação e contração vertical, da ficha de trabalho n.º 3 pretendeu, tal como na primeira ficha, que os alunos tomassem consciência das alterações que ocorreriam ao gráfico deslocado em relação ao gráfico da função inicial. Júlio e Maria responderam a esta questão de forma muito sucinta, identificando alterações mais gerais. Ambos os alunos apenas indicaram que o contradomínio seria diferente, tal como pode ser visto na figura 15 e 16.

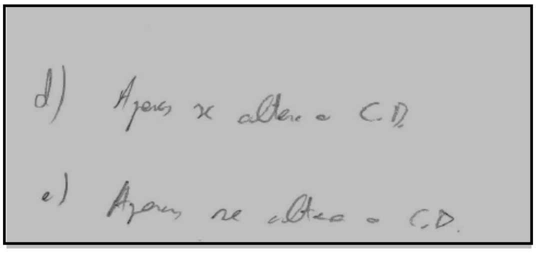


Figura 15 – Resolução de Júlio da questão $1d)$ e $1e)$

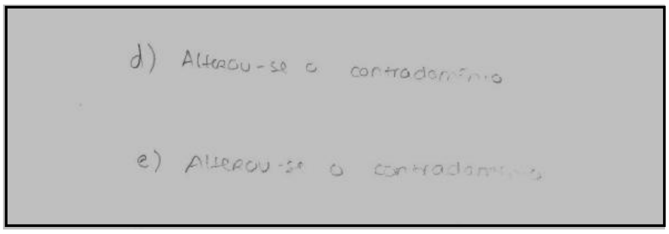


Figura 16 – Resolução de Maria da questão $1d)$ e $1e)$

A figura 17 seguinte mostra a exploração que Maria e Júlio realizaram no Geogebra. De facto, ambos se centraram no vértice da parábola, percebendo que as coordenadas deste se alterava cada vez que se contraia e dilatava, daí terem indicado que o contradomínio se alteraria.

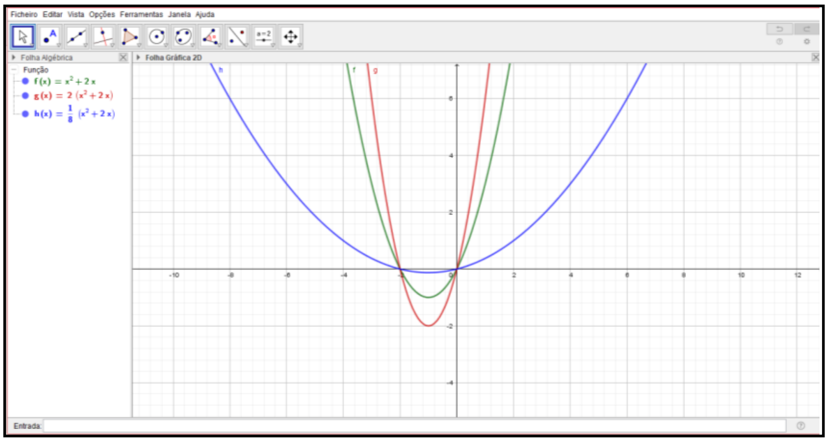


Figura 17 – Exploração de Júlio e de Maria da questão 1 da ficha de trabalho n.º 3

A questão $1f)$ e $1f)i)$ tinham o intuito de dar oportunidade aos alunos para explorarem a representação numérica e estabelecerem relações entre os valores obtidos na mesma. Júlio e Maria resolveram ambas as questões, tal como figuras abaixo mostram, figura 18 e 19.

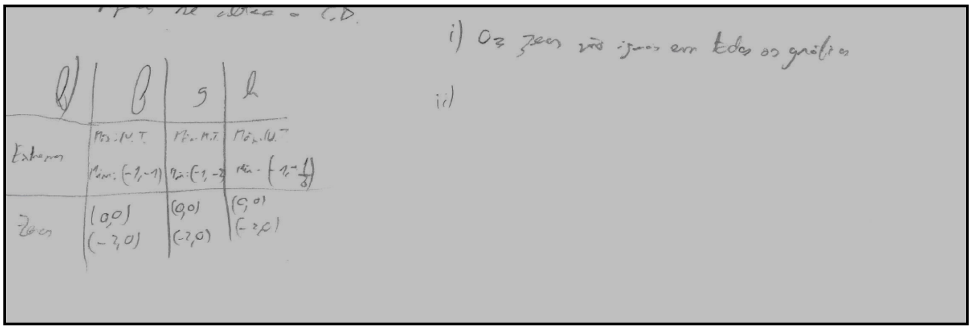


Figura 18 – Resolução do Júlio da questão $1f)$ e $1f)i)$ da ficha de trabalho n.º 3

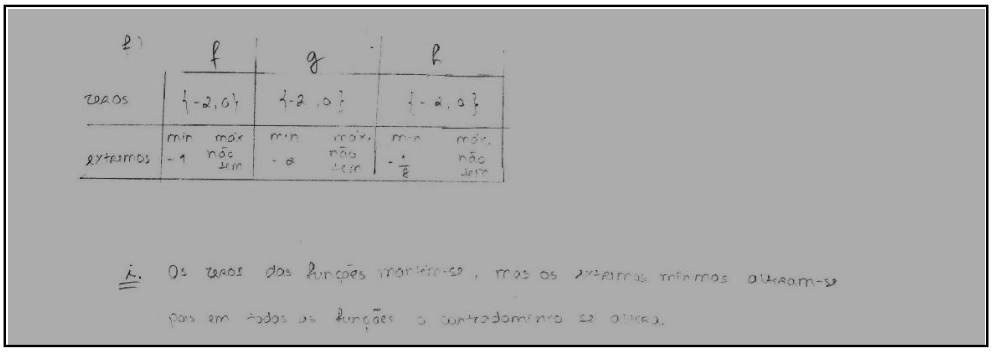


Figura 19 – Resolução da Maria da questão $1f)$ e $1f)i)$ da ficha de trabalho n.º 3

Pelas figuras anteriores é possível verificar-se que Maria apresenta uma resposta mais completa. Júlio elaborou a tabela e apenas identificou que os zeros de ambas as funções se manteriam iguais. Maria, por sua vez, além de mencionar que os zeros se mantinham, realçou o facto de os mínimos alterarem-se e que, em consequência disso, o contradomínio também se alteraria. Existe nesta resposta de Maria uma relação entre aquilo que aluna mencionou na alínea $d)$, em que apenas se baseava na observação do gráfico, e as conclusões que retira da tabela elaborada.

No que se refere à contração e dilatação horizontal, a questão $2b)$ procurou orientar os alunos a analisar no caso em que as referidas transformações ocorrem horizontalmente. Esta questão foi realizada pelos alunos depois de ter sido feita a discussão da parte correspondente à contração e dilatação vertical.

Assim sendo, Júlio e Maria responderam a esta questão de forma mais detalhada e com uma linguagem mais própria, referindo-se aos termos “contração” e “dilatação”. Júlio nesta questão afirma que ocorreu uma “contração vertical para a função i” e uma “dilatação vertical para a função j”, como a figura 20 mostra.

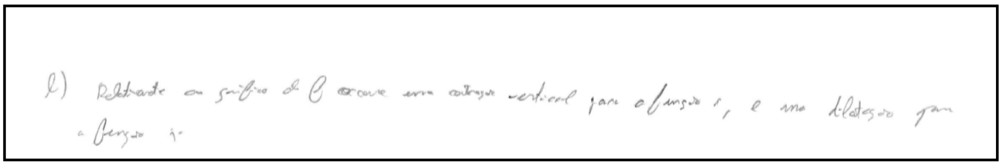

b) Relativamente ao gráfico de f ocorre uma contração vertical para a função i, e uma dilatação para a função j.

Figura 20 - Resolução do Júlio da questão $2b)$ da ficha de trabalho n.º 3

Júlio não se apercebeu que a transformação que afeta o gráfico da função f e que transforma este nos gráficos de i e j terá implicações horizontalmente e não verticalmente como este afirma. Esta dificuldade poderá estar associada ao facto de a parábola quando contrai horizontalmente aparenta dilatar verticalmente, tendo suscitado muitas dúvidas a mais alunos da turma.

Maria, por sua vez, identificou corretamente as transformações que ocorriam e identificou ainda alterações em relação aos extremantes da função f, como mostra a figura 21 seguinte. Maria ao mencionar os extremantes mobiliza conhecimentos previamente abordados em aula, antes de ser iniciado o tópico das transformações.

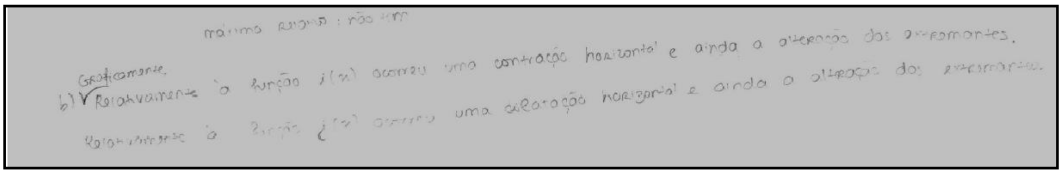

Graficamente,
b) Relativamente à função i(x) ocorreu uma contração horizontal e ainda a alteração dos extremantes.
Relativamente à função j(x) ocorreu uma dilatação horizontal e ainda a alteração dos extremantes.

Figura 21 – Resolução da Maria da questão $2b)$ da ficha de trabalho n.º 3

A questão $2c)i)$, na qual pretendia que os alunos recorressem à representação numérica, tinha o objetivo de os alunos compararem alguns pontos em particular das três funções. Júlio e Maria construíram a tabela pedida, contudo Maria já não conseguiu explicar a relação que existia entre os zeros e os extremos. Na figura 22 e 23 é possível visualizar as resoluções de ambos os alunos.

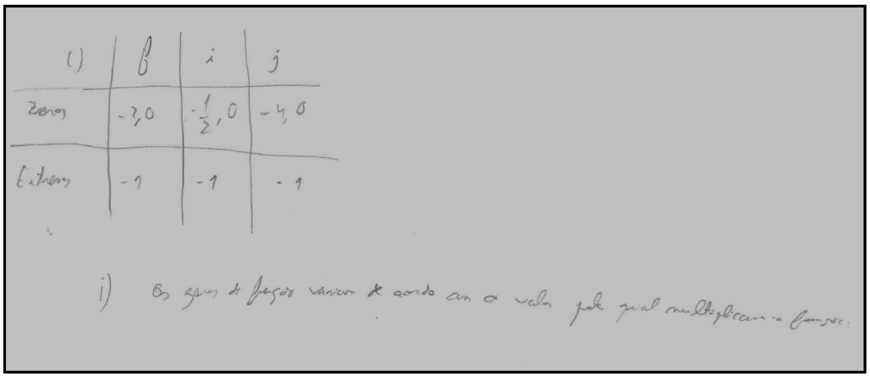


Figura 22 – Resolução de Júlio da questão $2c)i)$ da ficha de trabalho n.º 3

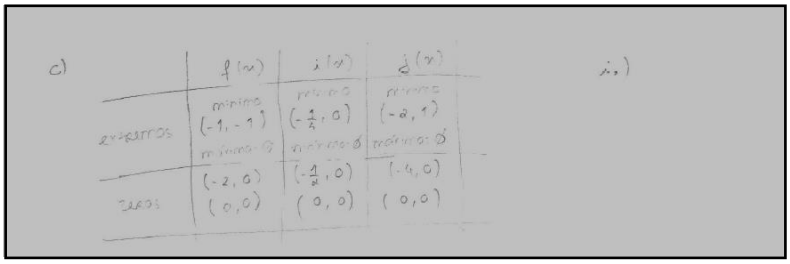


Figura 23 – Resolução de Maria da questão $2c)i)$ da ficha de trabalho n.º 3

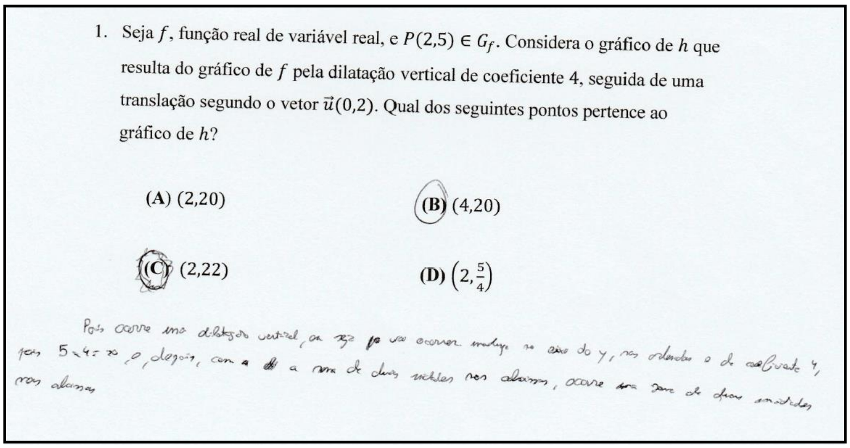
Júlio ao responder à alínea $i)$ afirma, tal como a figura 22 apresenta, que os "zeros variam de acordo com o valor pelo qual multiplicam a função". O aluno revela alguma incoerência entre aquilo que apresenta na tabela e aquilo que afirma, pois não existia um valor a multiplicar a função, mas sim o argumento. Além disso, o aluno não mostra uma justificação muito clara quando afirma que "os zeros variam de acordo", não explicitando que variação irá existir entre os zeros de f e os zeros da função i e j.

Ficha de Avaliação (anexo 4)

A segunda e a terceira questões da primeira parte, referentes à contração e dilatação, pretendiam que os alunos analisassem as diferenças entre uma função e a sua transformada.

A questão 2 exigia que o aluno pensasse no que iria ocorrer aos pontos do gráfico depois deste ser transformado, por meio de uma dilatação vertical seguida de uma translação vertical. Estando esta questão diretamente relacionada com transformações verticais, era esperado que os alunos fossem capazes de identificar alterações nas ordenadas dos pontos do gráfico.

Júlio não conseguiu responder corretamente a esta questão. O aluno conseguiu efetuar as operações necessárias ao ponto P que tinha sido transformado por meio da referida dilatação vertical, contudo não conseguiu realizar as operações necessárias ao ponto que permite transformar o mesmo por meio de uma translação vertical. Júlio optou pela resposta (B), tal como pode ser visto na seguinte figura 24. Esta figura mostra que Júlio, primeiramente optou pela resposta (C), no entanto alterou para a resposta (B).



1. Seja f, função real de variável real, e $P(2,5) \in G_f$. Considera o gráfico de h que resulta do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente 4, seguida de uma translação segundo o vetor $\vec{u}(0,2)$. Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de h?

(A) (2,20) **(B)** (4,20)

(C) (2,22) **(D)** $\left(2,\frac{5}{4}\right)$

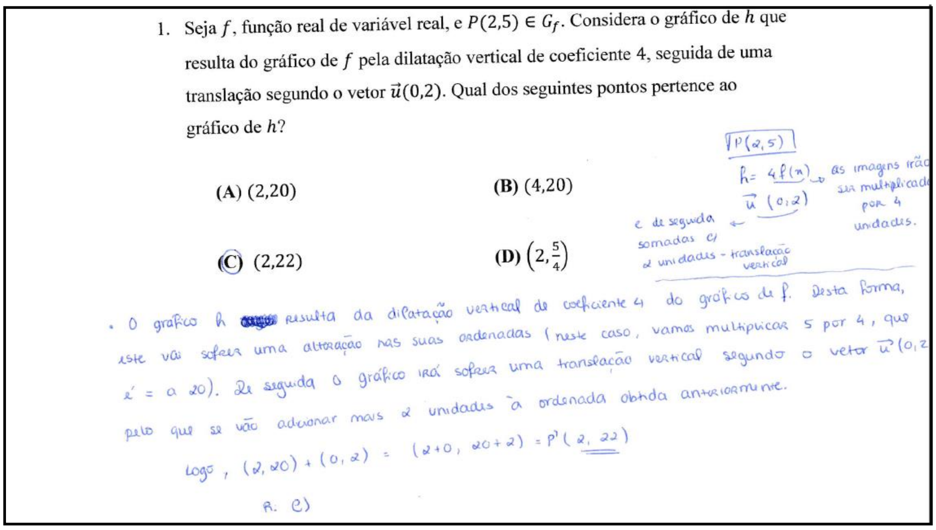
Pois ocorre uma dilatação vertical, ou seja, vai ocorrer mudança no eixo do y, nas ordenadas e de coeficiente 4, pois 5×4=20 e, depois, com a soma de duas unidades nas abcissas, ocorre uma soma de duas unidades nas abcissas

Figura 24 – Resolução do Júlio da questão 2 da ficha de avaliação

Júlio afirma: "Pois ocorre uma dilatação vertical, ou seja, vai ocorrer mudança no eixo do y, nas ordenadas e de coeficiente 4, pois $5 \times 4 = 20\ldots$". Júlio conseguiu perceber que a transformação associada à dilatação vertical de coeficiente 4 faria com que a ordenada fosse multiplicada pelo respetivo coeficiente. O aluno revela, nesta questão, ter realizado aprendizagens relativamente à transformação da dilatação vertical, recorrendo à representação numérica e parecendo perceber que, neste caso, a ordenada do ponto P será multiplicada pelo coeficiente 4.

No entanto, este aluno não conseguiu identificar corretamente a translação em causa. Através do vetor indicado esperar-se-ia que os alunos conseguissem perceber que a translação em causa é vertical. Júlio considerou tratar-se de uma translação horizontal através da justificação que deu: "…e, depois, com a soma de duas unidades nas abcissas, ocorre uma soma de duas unidades nas abcissas". Verifica-se, pois, que o aluno considera que existe uma deslocação do gráfico horizontalmente, não conseguindo relacionar o vetor com a transformação correta.

Maria, por sua vez, apresentou uma resposta bem fundamentada que mostra que percebe as transformações que são efetuadas no gráfico da função f e consequentemente no ponto P em causa. A figura 25 mostra a resposta dada por Maria.


1. Seja f, função real de variável real, e $P(2,5) \in G_f$. Considera o gráfico de h que resulta do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente 4, seguida de uma translação segundo o vetor $\vec{u}(0,2)$. Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de h?

(A) (2,20) (B) (4,20)

(C) (2,22) (D) $\left(2,\frac{5}{4}\right)$

$\boxed{P(2,5)}$

$h = 4f(x)$ → as imagens irão ser multiplicad[as] por 4 unidades.

$\vec{u}(0,2)$ ← e de seguida somadas c/ 2 unidades - translação vertical

• O gráfico h resulta da dilatação vertical de coeficiente 4 do gráfico de f. Desta forma, este vai sofrer uma alteração nas suas ordenadas (neste caso, vamos multiplicar 5 por 4, que é = a 20). De seguida o gráfico irá sofrer uma translação vertical segundo o vetor $\vec{u}(0,2)$ pelo que se vão adicionar mais 2 unidades à ordenada obtida anteriormente.

Logo, $(2,20)+(0,2) = (2+0, 20+2) = P'(2, 22)$

R: C)

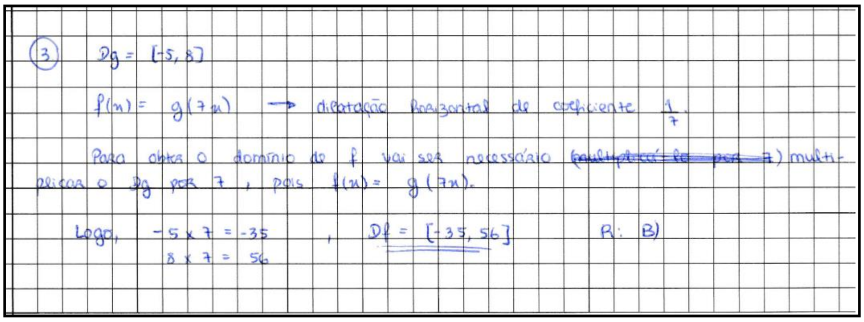
Figura 25 – Resolução da Maria da questão 2 da ficha de avaliação

Observa-se que Maria recorre tanto à representação algébrica como à representação verbal para justificar a resposta dada. No canto superior direito da sua resposta é possível verificar que a aluna escreve uma representação algébrica da função transformada, o que revela que a aluna consegue perceber que todas as imagens da função h são obtidas através das imagens da função f através da multiplicação pelo coeficiente 4. Contudo, não exprime de forma totalmente correta a expressão algébrica, ao escrever "$h = 4f(x)$". Além disso, o gráfico h não resulta apenas do gráfico de f por meio da dilatação vertical. Nesta última expressão, escrita por Maria, é importante salientar que a aluna consegue estabelecer uma relação entre a transformação e a expressão algébrica, ainda que não a tenha desenvolvido.

Quanto à translação vertical, Maria consegue perceber claramente que esta terá implicações nas ordenadas dos pontos, recorrendo à representação numérica para calcular o ponto esperado. Maria adiciona o ponto obtido da primeira transformação ao vetor que permite deslocar o gráfico verticalmente.

Com a questão 3, da ficha de avaliação, pretendia-se avaliar se os alunos eram capazes de determinar o domínio de uma função cujo gráfico era transformado de outro por meio de uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{7}$. Para responder a esta questão os alunos tinham de identificar, primeiramente, a transformação envolvida através da expressão algébrica da função f, neste caso, $f(x) = g(7x)$.

Tanto Júlio como Maria revelaram dificuldades na identificação da transformação associada. Por um lado, Maria não identificou a transformação em causa, afirmando que se tratava de uma dilatação horizontal, por isso mesmo, multiplicou os extremos do domínio por 7. A figura seguinte mostra a resolução de Maria.


③ $Dg = [-5, 8]$

$f(x) = g(7x) \longrightarrow$ dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{7}$.

Para obter o domínio de f vai ser necessário (~~multiplicá-lo por 7~~) multiplicar o Dg por 7, pois $f(x) = g(7x)$.

Logo, $-5 \times 7 = -35$, $Df = [-35, 56]$ R: B)

$8 \times 7 = 56$

Figura 26 – Resolução da Maria da questão 3 da ficha de avaliação

Como se observa na sua resposta, Maria identificou, erroneamente, a transformação como sendo uma dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{7}$. No entanto, a aluna multiplicou por 7 os extremos do domínio de g, dando a entender que compreende que, quando ocorre uma dilatação, os objetos da função f são multiplicados por 7. Existe uma falta de coerência entre a constante considerada por Maria e o coeficiente associado à transformação. Ao mesmo tempo, esta incoerência revelada por Maria pode ser vista quando a mesma associa uma dilatação a um coeficiente menor do que um. De facto, foi verificado na entrevista que Maria tinha a perceção que no caso horizontal algo ocorria ao "contrário", apesar de não perceber quando isso ocorre.

Por seu lado, Júlio não conseguiu identificar a transformação envolvida nesta questão revelando dificuldades de natureza variada. A figura seguinte mostra a justificação dada pelo aluno.

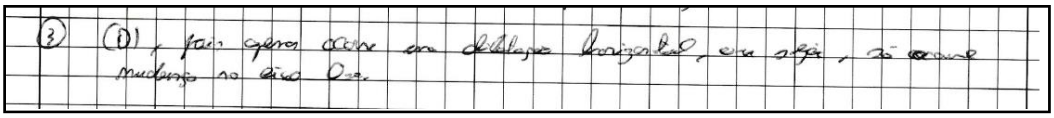
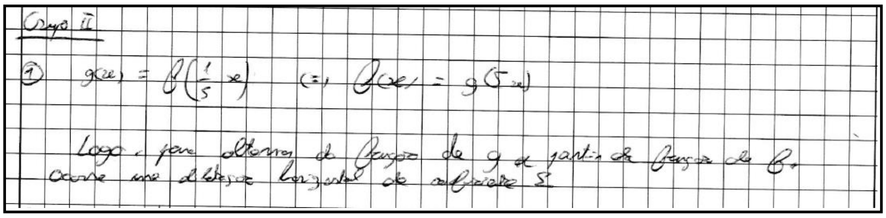

③ (D), pois apenas ocorre uma dilatação horizontal, ou seja, só ocorre mudança no eixo Ox.

Figura 27 – Resolução de Júlio da questão 3 da ficha de avaliação

Observa-se que Júlio escolhe a opção D e justifica da forma seguinte: "…, pois ocorre uma dilatação horizontal, ou seja, só ocorre uma mudança no eixo O_x". A sua escolha da opção D mostra que apenas considerou a modificação no primeiro extremo do domínio e que assume 7 como o coeficiente em causa. Provavelmente Júlio pensou que a transformação ao afetar apenas as abcissas só o primeiro extremo do domínio seria afetado, mostrando que o aluno revela dificuldades em relação à noção de domínio de uma função. Por outro lado, Júlio identifica incorretamente a transformação em causa, considerando que se trata de uma dilatação horizontal de coeficiente 7. O aluno ainda revela dificuldades em compreender que o eixo O_x não faz parte da função. Júlio não consegue compreender que as alterações que ocorrem dizem respeito às abcissas dos pontos pertencentes ao gráfico da função e não ao eixo.

Por último, analiso a questão 1 do grupo II da ficha de avaliação que vai ao encontro da questão anterior analisada, na qual se procura uma vez mais levar os alunos a relacionar a expressão algébrica com a transformação ocorrida. Nesta questão, Júlio respondeu corretamente, contudo Maria revelou dificuldades.

Júlio, ao contrário da questão anterior, conseguiu estabelecer uma relação algébrica entre ambas as funções, neste caso entre a função f e a função g. Como se pode ver na figura 28, Júlio tentou isolar a função f e colocar tudo em ordem a g identificando que ocorria uma dilatação horizontal de coeficiente 5.



Grupo II

① $g(x) = f\left(\frac{1}{5}x\right) \Leftrightarrow f(x) = g(5x)$

Logo, para obtermos o gráfico de g a partir do gráfico de f, ocorre uma dilatação horizontal de coeficiente 5

Figura 28 – Resolução de Júlio da questão 1 do grupo II da ficha de avaliação

Apesar de a resposta de Júlio estar correta, a justificação a que este recorre não vai ao encontro do que é pedido. A resposta de Júlio baseou-se na última parte da expressão obtida "$f(x) = g(5x)$", afirmando que perante esta conclusão obter-se-ia a transformação que identificou. No entanto, Júlio não percebeu que a transformação identificada por ele ocorreria no caso em que f fosse obtida por g.

Maria, mais uma vez, revelou dificuldades em identificar a transformação. Esta percebeu que se tratava de uma transformação a nível horizontal e que haveria alteração nas abcissas, mas não conseguiu compreender as alterações que ocorreriam graficamente. A figura 29 mostra que Maria não conseguiu perceber que $f\left(\frac{1}{5}x\right)$ irá provocar uma dilatação ao gráfico de f e não uma contração.

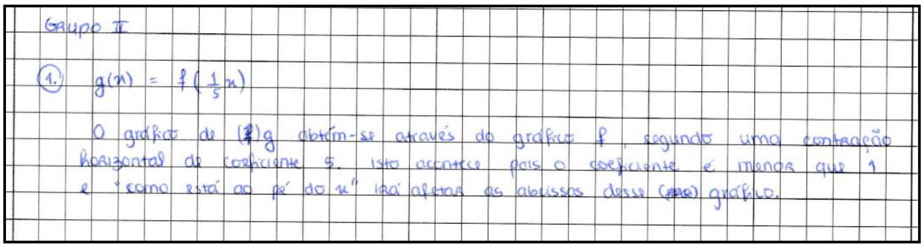


Figura 29 – Resolução da Maria da questão 1 do grupo II da ficha de avaliação

Tal como na questão analisada anteriormente Maria mostra falta de coerência entre a transformação que identifica e o coeficiente em causa. Maria afirma tratar-se de uma contração e identifica um coeficiente maior de que 1.

Entrevista (anexo 6.1.)

Na questão 3, Júlio e Maria apresentaram respostas diferentes. Por um lado, Júlio reconheceu rapidamente que houve uma dilatação vertical, por outro, Maria pensou que fosse uma contração. Perante esta dificuldade de Maria, pedi que me explicasse o seu raciocínio efetuado pela mesma, ao qual me respondeu que o gráfico da função g estava mais contraído.

Júlio, por sua vez, ao explicar como tinha identificado a transformação recorreu a valores específicos, os máximos e mínimos da função. O aluno concluiu que os máximos relativos da função g iriam ser superiores aos da função f. Nesta altura, em que Maria já tinha entendido que a transformação se tratava de uma dilatação e não de uma contração, apercebi-me que esta estava a fazer confusão com o caso horizontal, afirmando que "pensava que era ao contrário". O diálogo seguinte mostra isto mesmo:

> **Maria:** Eu pensava que era ao contrário. Então na horizontal…eu agora estou um bocado confusa com a horizontal e a vertical.
> **Professora Marisa:** O que se passa com a horizontal?
> **Maria:** Eu baralho quando é contração vertical e quando é que é dilatação.

Entretanto, questionei os alunos acerca da expressão analítica da função g. Júlio quando alertado para a informação que o enunciado dava relativamente aos pontos pertencentes ao gráfico de f e de g, conseguiu identificar, de seguida, a expressão analítica. A explicação que ambos os alunos forneceram pode ser vista através do seguinte diálogo:

Professora Marisa: Porque é que é $\frac{5}{3}f(x)$? O que é que isso quer dizer?

Maria: Temos no gráfico de f o ponto $(0,3)$ e para obter no gráfico de g o ponto $(0,5)$ vamos ter que multiplicar o 3 por x…vai ser…neste caso é o $\frac{5}{3}$ para dar o 5.

Professora Marisa: E porque é que multiplicamos o $f(x)$ por $\frac{5}{3}$?

Maria: Para obter a dilatação ao nível das imagens.

Professora Marisa: E portanto?...Multiplicamos por $f(x)$, não é? Qual é a expressão que nos dá as imagens?....Ou seja o que é que vou fazer a todas as imagens da minha função?

Júlio: Multiplicá-las por $\frac{5}{3}$.

Ambos não mostraram dificuldade em identificar o coeficiente associado à dilatação vertical, conseguindo relacionar ambos os pontos dados e perceber de que forma a ordenada 3 passaria à ordenada 5. Ao mesmo tempo, a interpretação que fizeram relativamente como este coeficiente afetaria a função f mostra que os alunos perceberam que todas as ordenadas dos pontos do gráfico de f seriam multiplicadas a $\frac{5}{3}$ e que essa alteração faria com que o gráfico se "estica-se".

As questões $4b)$, $4c)$ e $4d)$ pretendiam levar o aluno a relacionar a expressão algébrica dependente de f à transformação que ocorreu ao gráfico desta função.

Relativamente à alínea $b)$ Júlio e Maria, reconheceram de forma correta a transformação associada e que todas as imagens vão ser multiplicadas por $\frac{1}{2}$.

A alínea $c)$ além de conter a transformação de contração também englobava a translação que já foi abordada na secção anterior. Esta alínea suscitou uma dúvida a Júlio e Maria quando estes indicaram a transformação e o coeficiente em causa. Júlio apercebeu-se que existia uma incoerência entre a transformação e o que o coeficiente considerado reproduziria no gráfico de f. O seguinte excerto permite ilustrar a situação ocorrida:

Professora Marisa: Na c), qual é a transformação?
Júlio: Uma dilatação horizontal e uma translação vertical.
Professora Marisa: Então na i) há uma dilatação horizontal segundo que coeficiente, Maria?
Maria: $\frac{1}{5}$
Professora Marisa: Ok, a Maria disse uma dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{5}$…Ou seja, o que é que quer dizer, em relação aos pontos?
Maria: Que todas as abcissas vão ser multiplicadas por $\frac{1}{5}$.
Professora Marisa: Certo, Júlio?
Júlio: Estou na dúvida…Ora porque multiplicar por $\frac{1}{5}$ é o mesmo que dividir por 5, logo vão ficar mais pequenas, portanto o coeficiente vai ser 5.
Professora Marisa: Exato, as abcissas vão ser mais pequenas. Portanto será que vai haver uma contração ou uma dilatação?
Júlio: Sim, é uma contração…
Maria: Sim, vai ser uma contração.

Depois deste diálogo que envolveu a professora e os dois alunos, ambos mostraram ter percebido a implicação que o coeficiente teria nas abcissas dos pontos e, consequentemente na transformação associada ao gráfico.

5.1.3. Reflexão

Nesta ficha de trabalho (anexo 2.5.) focar-me-ei nas questões $1d)ii), 1d)iv)$, $1d)v)$, $2b)iii), 2b)v)$ e $2b)vi)$. Todas elas pretenderam levar o aluno a fazer uma exploração gráfica, numérica e algébrica.

As figuras seguintes referem-se às resoluções de Júlio e Maria às alíneas da primeira questão, bem como a exploração que ambos fizeram no Geogebra.

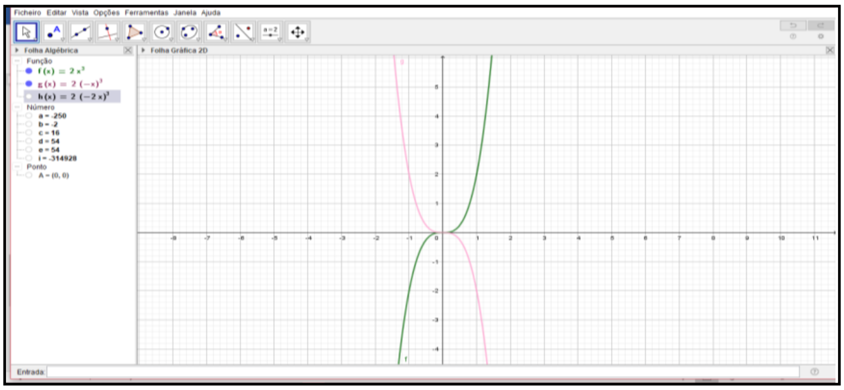


Figura 30 – Exploração de Júlio e Maria da questão 1 da ficha de trabalho n.º 5, no Geogebra

Figura 31 – Resolução de Júlio da questão $1d)ii)$ da ficha de trabalho n.º 5

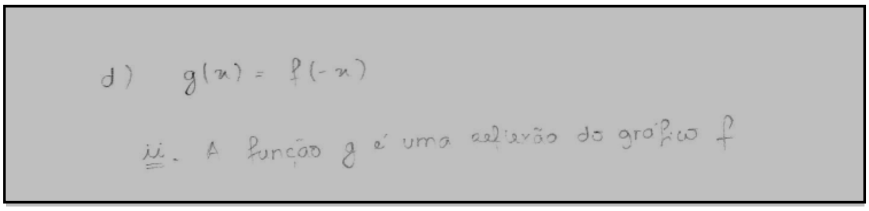


Figura 32 – Resolução de Maria da questão $1d)ii)$ da ficha de trabalho n.º 5

As figuras anteriores mostram que Júlio e Maria foram capazes de identificar que ocorre uma reflexão, representando no Geogebra a função $f(-x)$.

A figura 33 e 34 correspondem às resoluções de Júlio e Maria em relação às alíneas $iv)$ e $v)$.

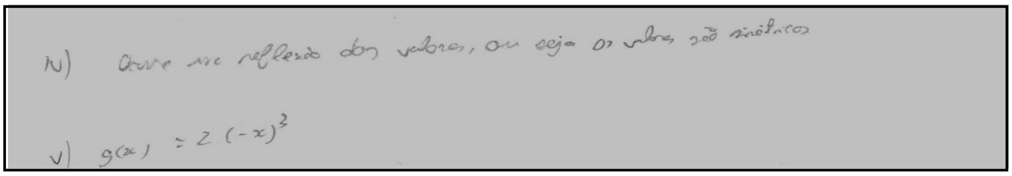


Figura 33 – Resolução de Júlio das alíneas $iv)$ e $v)$ da ficha de trabalho n.º 5

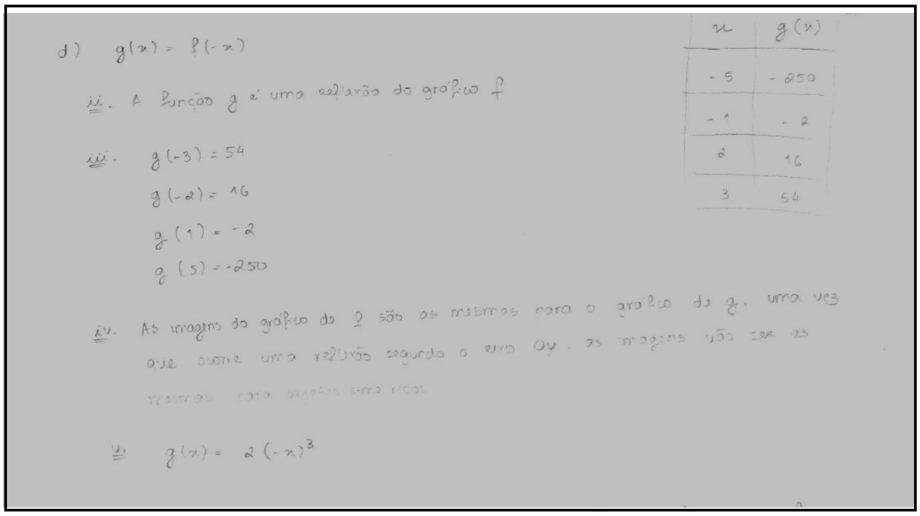


Figura 34 – Resolução de Maria das alíneas $iv)$ e $v)$ da ficha de trabalho n.º 5

Júlio e Maria reconhecem que existe a alteração de alguns dos valores. Júlio afirma que ocorreu uma “reflexão dos valores, ou seja os valores são simétricos”. Contudo este aluno não especifica a que valores se refere. Mais uma vez, está presente em Júlio a dificuldade em expressar-se matematicamente quando se refere à “reflexão dos valores”.

Por seu turno, Maria reconhece que as imagens de f e g são as mesmas pois a reflexão que ocorre é segundo o eixo O_y. Apesar de não estar bem explicito uma parte da resposta de Maria, deduzo que esta percebeu que os objetos da função f e g são simétricos, tal como pode ser visto na tabela construída por Maria e pela resposta que deu na alínea $iii)$.

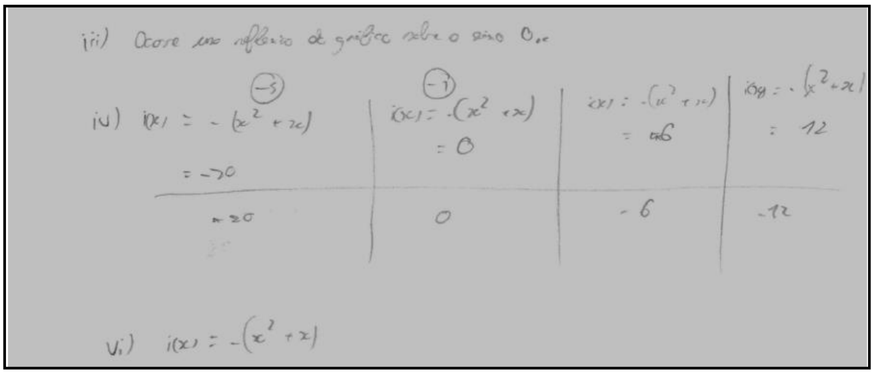


Figura 35 – Resolução de Júlio das alíneas $2b)iii)$, $2b)iv)$ e $2b)vi)$

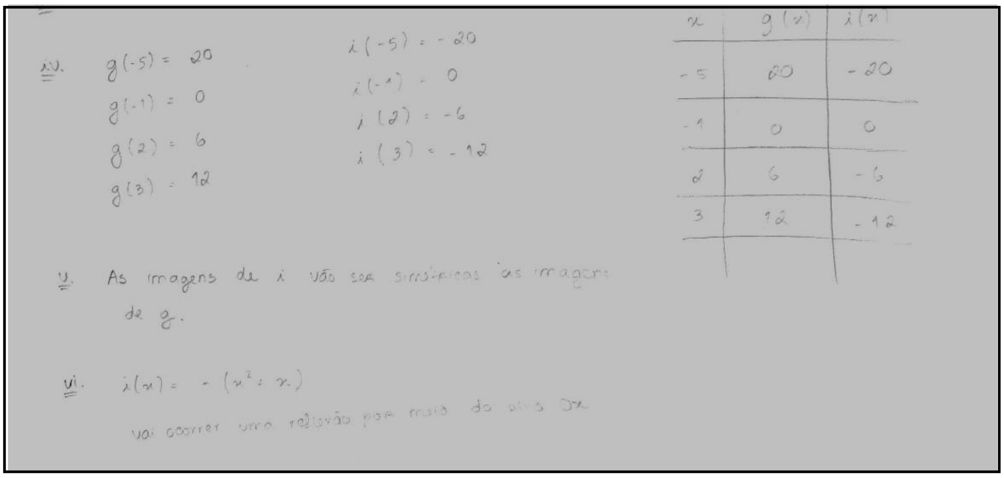


Figura 36 – Resolução de Maria das alíneas $2b)iii), 2b)iv, 2b)v)$ e $2b)vi)$

Através da figura 35 e 36, ambos os alunos percebem que existe uma reflexão, mas agora no eixo O_x. Júlio apesar de não ter respondido à alínea v apercebe-se que as imagens de g e i vão ser simétricas e que isso afetará toda a expressão analítica de g. É visível que Júlio, nesta questão, já recorre a uma linguagem mais própria afirmando que “Ocorre uma reflexão do gráfico sobre o eixo O_x”.

Maria, à alínea v) responde " As imagens de i vão ser simétricas às imagens de g", tendo conseguido, tal como Júlio, escrever corretamente a expressão analítica da função i.

5.2. Luís e Martim

5.2.1. Translação vertical e horizontal

Ficha de Trabalho n.º1 (anexo 2.1.)

Luís e Martim, responderam sem problemas à questão $1c)i)$. Luís identificou algumas alterações que ocorrem quando o gráfico é transformado tais como no contradomínio, zeros, vértices e extremos. Martim identificou as mesmas situações que Luís, no entanto este contruiu uma resposta mais completa, indicando especificamente as alterações que verificou de um gráfico para outro. As seguintes figuras mostram as resoluções de ambos os alunos:

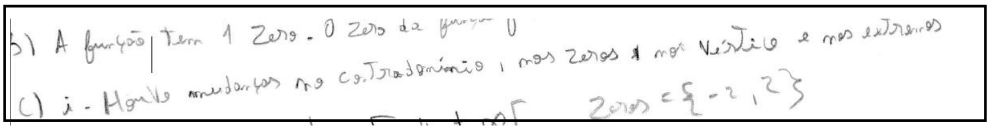

b) A função tem 1 zero. O zero da função 0
c) i - Houve mudanças no contradomínio, nos zeros e no vértice e nos extremos
Zeros = {-2, 2}

Figura 37 – Resolução de Luís da questão $1c)i)$ da ficha de trabalho n.º1

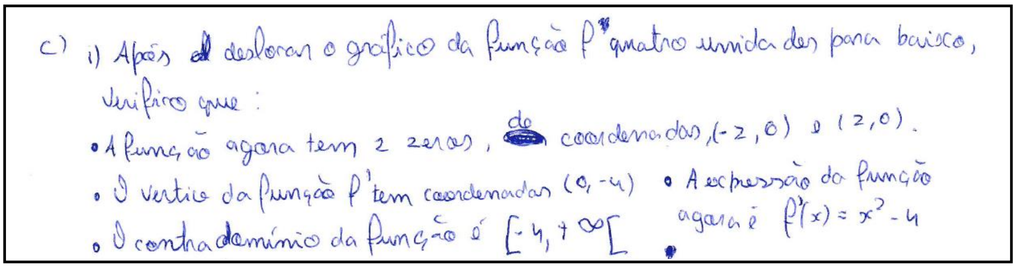

c) i) Após deslocar o gráfico da função f quatro unidades para baixo, verifico que:
• A função agora tem 2 zeros, de coordenadas (-2, 0) e (2, 0).
• O vértice da função f' tem coordenadas (0, -4)
• O contradomínio da função é [-4, +∞[
• A expressão da função agora é f'(x) = x² - 4

Figura 38 – Resolução de Martim da questão $1c)i)$ da ficha de trabalho n.º1

Martim na resolução anterior indica a nova expressão algébrica da função transformada. Este ao representar no Geogebra o gráfico transformado não representou o vetor que permite aplicar a translação, tendo logo definido a expressão da nova função como sendo $x^2 - 4$. O seguinte diálogo, ocorrido durante a aula, vai ao encontro disso mesmo:

Professora Marisa: Martim como é que deslocaste [o gráfico]?
Martim: Então x^2, não é? Logo fica $x^2 - 4$.

Martim não necessitou de aplicar a transformação ao gráfico de f para perceber qual era a expressão algébrica da nova função, situação esta que pude verificar durante a aula. Contudo, o aluno acabou por apresentar-me o ficheiro de Geogebra no qual recorria a um vetor e às funcionalidades deste software para determinar o gráfico da função transformada, tal como se pode ver na figura X. Ao longo da discussão em grupo-turma, alertei os alunos para a possibilidade de estes criarem um vetor para poderem deslocar o gráfico, visto quase todos terem criado intuitivamente a expressão da nova função, transformada de f.

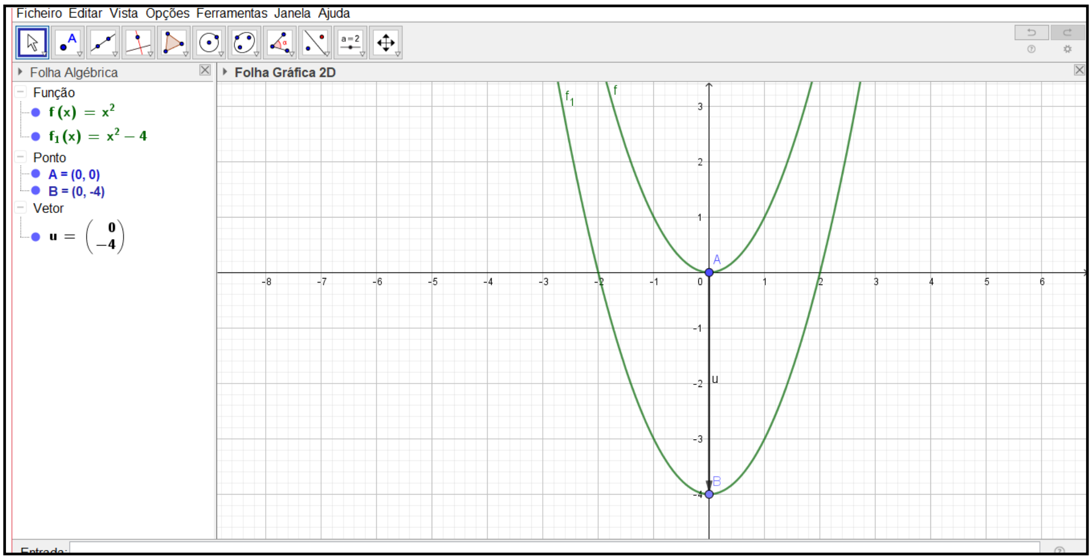


Figura 39 – Exploração de Martim da questão 1 da ficha de trabalho n.º 1, no Geogebra

No que diz respeito à questão e), Martim fez as tabelas pedidas apesar de as ter apagado e ter respondido às alíneas desta questão. Luís, por sua vez, não realizou nenhuma alínea desta questão.

A resolução efetuada por Martim, tal e qual a figura 40 mostra, vai ao encontro do que é esperado. Apesar de ter apagado as tabelas que eram solicitadas, o aluno conseguiu perceber que a nova função, em relação à função f, iria diferenciar-se nas imagens e que cada uma destas iriam obter-se através da subtração entre as imagens de f e quatro.

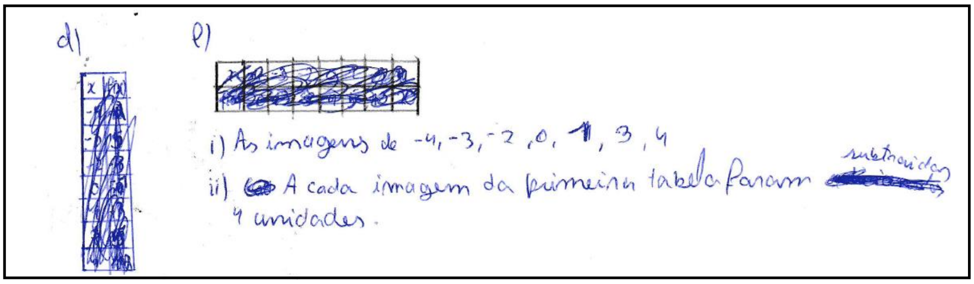


Figura 40 – Resolução de Martim da questão 1e) da ficha de trabalho n.º1

A questão 2, que dizia respeito à *translação horizontal*, pretendeu que os alunos identificassem as alterações que iriam ocorrer depois do gráfico de f ser deslocado. Mais uma vez Martim elaborou uma resposta mais detalhada, tendo conseguido identificar mais alterações que Luís.

Luís apenas identificou que haveria alterações no "vértice da função e no zero", tal como a figura 41 mostra:

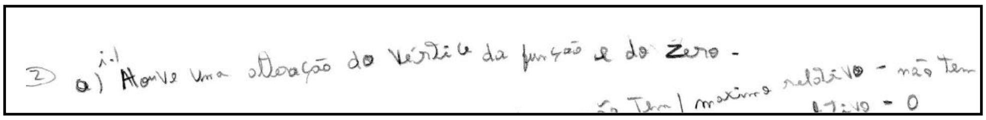


Figura 41 – Resolução de Luís da questão 2 da ficha de trabalho n.º 1

Martim, além de identificar as mudanças no vértice e nos zeros, indica também alterações nos maximizantes e na expressão analítica, tal como se pode verificar na figura 42 seguinte.

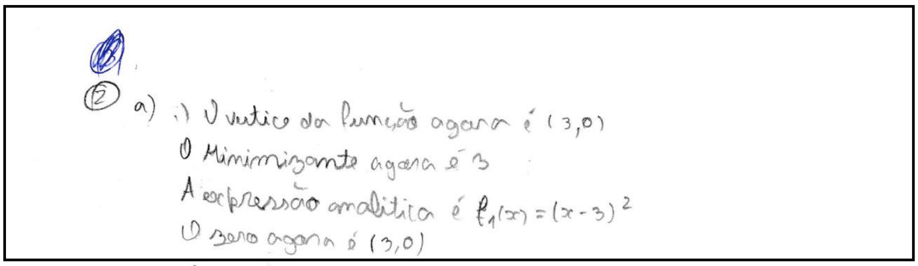


Figura 42 – Resolução de Martim da questão 2 da ficha de trabalho n.º 1

A expressão analítica identificada por Martim resultou da exploração que o aluno efetuou no Geogebra, que pode ser visto na figura 43. Este optou por utilizar um vetor e utilizar a ferramenta relativa à translação presente no Geogebra. Ao contrário do que aconteceu na transformação anterior, Martim identificou logo a expressão analítica da nova função. Apesar de os ficheiros do Geogebra corresponderem aos produtos finais, o aluno questionou-me antes de representar a nova função como faria para representar o vetor e indicar a referente transformação no Geogebra. Esta situação acabou por ocorrer porque a discussão da transformação anterior focou-se na possibilidade de criar um vetor para se efetuar uma translação. Além disso, alertei logo os alunos para o facto de esta transformação não ser tão intuitiva como a anterior, a translação vertical.

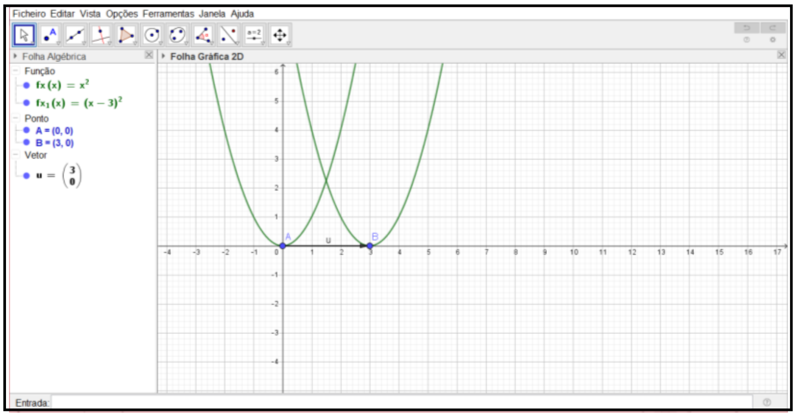


Figura 43 – Exploração de Martim da questão 2 da ficha de trabalho n.º1, no Geogebra

Em ambas as resoluções dos alunos é possível identificar uma dificuldade referente à linguagem matemática. Tanto Luís como Martim referem-se ao "vértice da função", desconsiderando que o vértice corresponde ao gráfico da função que, neste caso é uma parábola.

Ficha de Avaliação

Na questão 1 (anexo 4), Martim não estabeleceu uma relação entre a expressão analítica da função g com a transformação ocorrida ao gráfico de f, mencionando apenas o vetor associada à transformação e concluindo que a expressão analítica de g seria igual a $(x-5)^3$, tal como mostra a figura seguinte.

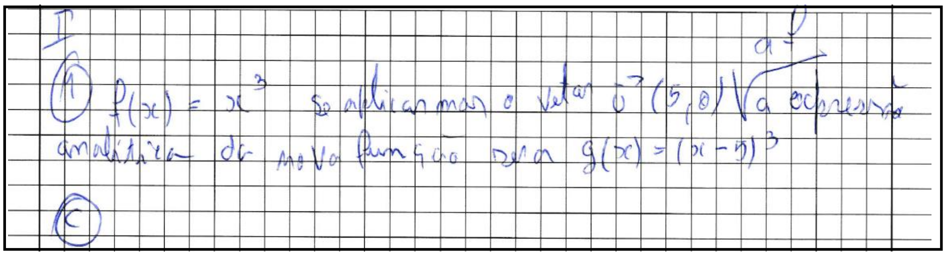

I
① $f(x) = x^3$ se aplicarmos o vetor $\vec{u}(5,0)$ a f a expressão analítica da nova função será $g(x) = (x-5)^3$
ⓒ

Figura 44 – Resolução de Martim da questão 1 da ficha de avaliação

Por outo lado, Luís considerou a expressão analítica da nova função como se o gráfico da função inicial tivesse sofrido uma translação vertical. Através da figura 45 é possível verificar que Luís também apresenta dificuldades relativamente à noção de função. Luís considera a expressão $x^3 - 5$ como sendo a expressão analítica da nova função, no entanto a figura abaixo mostra que esta mesma expressão corresponde aos objetos da nova função. Este último aspeto revela que o aluno tem consciência que, a nível de função, existe mudança nos objetos, contudo não consegue representar algebricamente essa mudança.


① $f(x) = x^3$ $\vec{u}(5,0)$
$g(x) = f(x^3 - 5)$
Opção (D)

Figura 45 – Resolução de Luís da questão 1 da ficha de avaliação

Entrevista **(** anexo 6.1.)

Luís e Martim conseguiram identificar a transformação associada, nesta primeira questão, realçando que o gráfico de f tinha sofrido uma transformação horizontal segundo o vetor $(2,0)$, assim como as figuras 46 e 47 mostram.

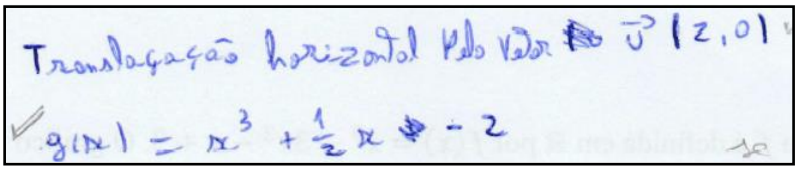
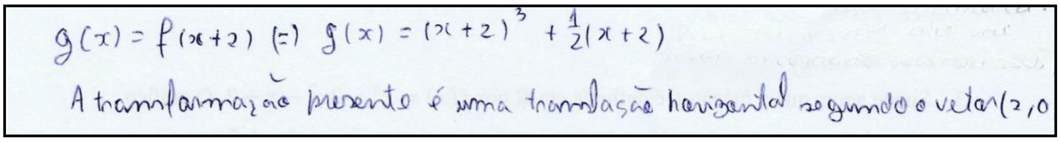

Translagação horizontal pelo vetor $\vec{u}(2,0)$
$g(x) = x^3 + \frac{1}{2}x - 2$

Figura 46 – Resolução de Luís da questão 1 da entrevista


$g(x) = f(x+2) \Leftrightarrow g(x) = (x+2)^3 + \frac{1}{2}(x+2)$

A transformação presente é uma translação horizontal segundo o vetor (2,0

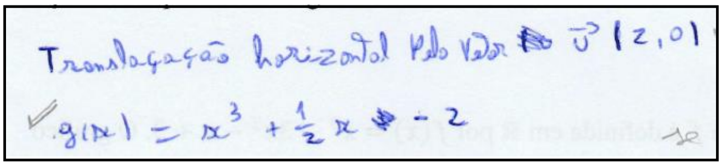
Figura 47 – Resolução de Martim da questão 1 da entrevista

Tanto Luís como Martim justificaram as respostas que deram. Por um lado, Luís conclui que só a translação faria sentido pois existia uma deslocação do gráfico para a direita, mencionando que nem a dilatação nem a contração fariam o gráfico deslocar-se dessa forma. Martim debruçou-se sobre as alterações que ocorreriam ao deslocar-se o gráfico de f segundo um certo vetor. O seguinte diálogo ilustra isto mesmo:

> **Professora:** Luís como é que pensaste? Qual é a transformação?
> **Luís:** Eu considerei que fosse uma translação horizontal pelo vetor $\vec{u}(2,0)$.
> **Professora:** Porquê?
> **Luís:** Porque como nos diz que o gráfico de f foi deslocado duas unidades para a direita…pronto, então automaticamente vai ser como uma translação horizontal. Como é deslocado duas unidades para a direita então não há nenhuma dilatação ou contração.
> **Professora:** Como é que pensaste [Martim]?
> **Martim:** Primeiro fui ver que se se deslocava para a direita tem que se ter uma alteração das abcissas…Como é para a direita suponho que seja positivo, por isso vai ser um vetor com abcissa positiva e ordenada nula…só se vai andar para a direita.

Martim conseguiu nesta etapa estabelecer a relação entre a possível transformação do gráfico com o vetor que lhe estava a associado, justificando que para a transformação ser horizontal, a ordenada do vetor teria de ser nula. Martim foi capaz de mobilizar conhecimentos adquiridos anteriormente relativos à noção de vetores que tinha sido trabalhado durante o 3.º ciclo e no presente ano letivo.

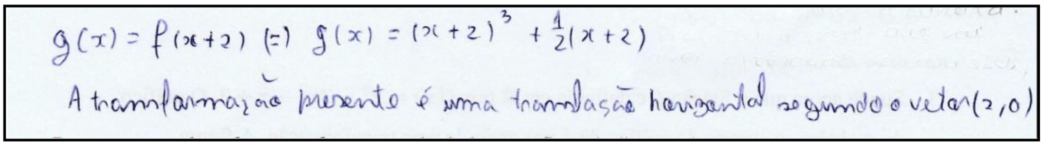
Apesar de Luís e Martim terem conseguido indicar a transformação e o vetor associado, estes revelaram dificuldades em representar algebricamente a expressão analítica da função nova associada ao gráfico transformado. Luís afirmou que a expressão analítica associada à função que corresponde ao gráfico transformado era $g(x) = f(x) - 2$, sendo f a função inicial (figura 48). Perante a resposta dada, Luís foi questionado por mim "Porquê -2? Ou seja, à expressão algébrica de f subtrais duas unidades, é isso?". Logo a seguir de ter feito esta questão, Luís parou um pouco e disse "Porque estava a pensar…confundi…estava a pensar…". O aluno mostra que reconheceu algum erro na resposta que deu, contudo não explicou que erro era esse.


Translagação horizontal pelo vetor $\vec{u}(2,0)$

$g(x) = x^3 + \frac{1}{2}x - 2$

Figura 48 – Resolução de Luís da questão 1 da entrevista

Como não havia muito tempo para a concretização da entrevista, acabei por questionar Martim logo de seguida. Ao visualizar a resposta dada por Martim, presente na figura 49, e depois de este ter dito o que se ia modificar nas abcissas, questionei-o sobre o efeito sobre os objetos de f, visto o aluno ter escrito $g(x) = f(x+2)$. Martim, depois de eu ter afirmado que este somou duas unidades aos objetos de f, apenas reconheceu que "Ah sim estava a confundir". Mais uma vez não consegui perceber o que o aluno pensou, tal como tinha acontecido com Luís.


$g(x) = f(x+2) \Leftrightarrow g(x) = (x+2)^3 + \frac{1}{2}(x+2)$

A transformação presente é uma translação horizontal segundo o vetor (2,0)

Figura 49 – Resolução de Martim da questão 1 da entrevista

Logo de seguida, sugeri que os alunos representassem na calculadora gráfica o gráfico da função f e da função g que estes tinham considerado. Martim ao visualizar o gráfico de g percebeu que a expressão algébrica que indicara não reproduzia a transformação identificada anteriormente. Porém, Martim também não soube explicar porque é que a expressão algébrica que considerou não foi ao encontro do gráfico esperado, afirmando apenas que: "Esqueço-me sempre que no x tenho de mudar os sinais".

Por seu lado, Luís continuou a revelar dificuldades mesmo a visualizar os gráficos na calculadora. O seguinte diálogo ilustra as conclusões a que Luís chegou:

Professora Marisa: Luís o que verificaste? O que aconteceu ao gráfico de f? O que ocorreu uma translação vertical ou horizontal?
Luís: Horizontal.
Professora Marisa: Foi? Qual é o gráfico de f?

Luís: O gráfico de f é o rosa (Luís indica o gráfico de f na calculadora).
Professora Marisa: Então e o que acontece ao [gráfico] preto? (o gráfico preto corresponde ao gráfico transformado representado na calculadora)
Luís: Relativamente ao preto deslocou-se duas unidades para a direita.
Professora Marisa: Será?
Luís: Sim.
Professora Marisa: Martim o que achas?
Martim: Deslocou-se para baixo.
Luís: Deslocou-se para baixo?
Professora Marisa: Sim, ocorreu uma translação vertical.

Luís, ao representar o gráfico da função f e do seu transformado considerada por este, $g(x) = f(x) - 2$, o gráfico de g resultava efetivamente do gráfico de f através de uma translação vertical segundo o vetor $(0, -2)$. Contudo, como mostra a descrição acima, Luís insistiu que o gráfico de g resultava do gráfico de f segundo uma translação horizontal de vetor $(2,0)$.

Quando questionados sobre as alterações que a presente transformação causaria ao gráfico de f, Luís e Martim reagiram da seguinte forma:

Professora Marisa: Que alterações ocorreram?
Martim: O gráfico deslocou-se duas unidades para a direita.
Professora Marisa: Sim, e mais?...Luís?
Luís: Mais mudanças?
Professora Marisa: Sim, mais mudanças que, ao veres o gráfico, identificas?
Martim: Posso dizer mais um?
Professora Marisa: Sim.
Martim: Então nos zeros da função. Só tem um zero. No outro [na função f] é a origem, mas aqui [na função g] é no ponto $(2,0)$.
Professora Marisa: Portanto os zeros alteram-se. Exatamente!
Luís: É incorreto dizer que o domínio muda?
Professora Marisa: Será que muda?
Martim: Não muda porque o domínio da função f é $\mathbb{R}$. Logo é $\mathbb{R}$ na mesma.
Professora Marisa: E mais?
Martim: Os extremos.
Luís: Seriam os máximos…Os maximizantes…
Professora Marisa: Não existe extremos.
Martim: Se limitarmos ou não o…
Professora Marisa: Ok, [no caso de limitarmos o domínio] os máximos alteram-se. E os outros pontos?
Martim: Sim, na abcissa será adicionada duas unidades.

Luís e Martim foram conseguindo identificar as alterações que ocorreriam ao gráfico de f quando este era deslocado. Martim conseguiu de imediato identificar de imediato algumas delas, enquanto que Luís demorou um pouco mais a pensar. Da penúltima frase de Martim que não é terminada por ele, inferi que este se referia a uma condição que seria preciso ser imposta à função para a existência de extremos. Tal como aconteceu com o par anterior, Luís e Martim foram questionados por mim sobre o que aconteceria ao domínio da função g caso a função f tivesse o domínio de $[-2,3]$. Ambos foram capazes de identificar corretamente o domínio da função correspondente ao gráfico transformado.

Na questão 2, nem Luís nem Martim demonstraram ter dificuldades e conseguiram corresponder aos objetivos visados para esta questão. Os alunos foram capazes de utilizar a informação que lhes era dada relativamente aos pontos indicados. Martim começou por afirmar que, neste caso, as abcissas não se iriam alterar, pois o gráfico tinha-se deslocado sobre o eixo O_y. O aluno recorreu ainda aos pontos $(0,0)$ e $(0,3)$ do gráfico de f e g, respetivamente, para explicar que a transformação estava associada à translação vertical segundo o vetor $(0,3)$. Luís pensou de forma semelhante, recorrendo à visualização de ambos os gráficos e identificando corretamente a expressão analítica da função g. De seguida, apresento o excerto da entrevista relativa ao que foi analisado anteriormente:

> **Professora**: Como pensaste Martim?
> **Martim:** Primeiro fui ver o gráfico de f… fui ver que o zero de f seria o 0 e depois como podemos ver que o g… podemos ver logo que as abcissas não mudaram porque o gráfico deslocou-se no eixo O_y e vemos que o ponto que antes tinha coordenadas $(0,0)$ tem agora coordenadas $(0,3)$ e, portanto, presumimos que temos uma translação vertical segundo o vetor $(0,3)$.
> **Professora:** E tu, Luís, como pensaste?
> **Luís:** Eu olhei diretamente para o gráfico, reparei que como dizia que o gráfico g intersetava o eixo das ordenadas no ponto $(0,3)$…e depois olhei em que ponto é que, por exemplo, o ponto do zero do f então como vi que houve uma mudança… uma translação de três unidades para cima pelo vetor $(0,3)$, então eu escrevi que $g(x) = f(x) + 3$.

A alínea a) da questão 4 envolvia dois tipos de transformação geométrica, a translação horizontal e a transformação vertical. Luís e Martim também conseguiram reconhecer ambas as transformações associadas. Luís mencionou as duas transformações em separado, enquanto que Martim afirmou que “ocorreu uma translação segundo o vetor $(-3,4)$”. Isto porque, nesta altura, já tinha sido abordado em aula a noção de vértice do gráfico da função quadrática e a composição de transformações.

Relativamente à alínea c) Luís e Martim conseguiram identificar corretamente a translação associada, tendo Luís referido ainda que "o gráfico iria mover-se quatro unidades para baixo e que todas as ordenadas dos pontos de f iriam ser subtraídas a quatro unidades". Nesta questão, Luís começou por reconhecer primeiro a translação e só depois a contração, tendo sido alertado pelo colega que primeiro se efetuaria a contração e só depois a translação, tal como mostra o diálogo seguinte:

> **Luís:**…Seria a translação pelo vetor …
> **Martim:** Não, tens de começar de "dentro para fora".
> **Professora Marisa:** Ou seja, terias de começar sempre primeiro por esta [aponto na direção de $f(5x)$]
> **Luís:** Sim, pronto…Então…

5.2.2. Contração e dilatação vertical e horizontal

Ficha de Trabalho n.º3 (anexo 2.3.)

As questões $1d$) e $1e$) foram resolvidas tanto por Luís como por Martim. Em comparação com o par anterior, estes alunos conseguiram identificar mais diferenças entre o gráfico da função f e o gráfico transformado. Luís mencionou que havia alterações "dos vértices, das imagens, e dos mínimos", tal como pode ser visto na figura 50.

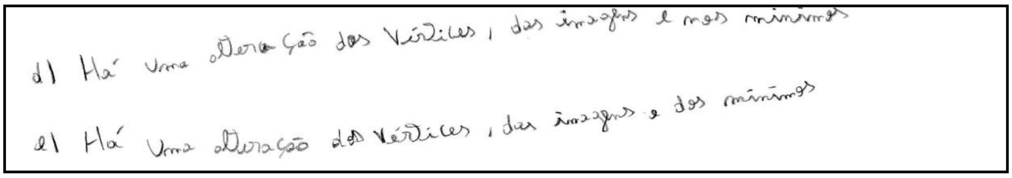
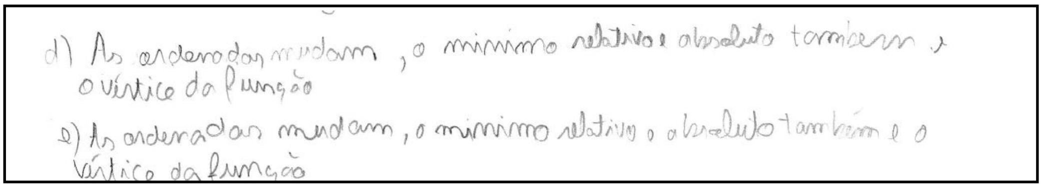

d) Há uma alteração dos vértices, das imagens e nos mínimos
e) Há uma alteração dos vértices, das imagens e dos mínimos

Figura 50 – Resolução de Luís da questão $1d$) e $1e$) da ficha de trabalho n.º 3

Martim afirmou que estas alterações ocorreriam nas ordenadas, no mínimo absoluto e relativo, e no vértice da função", como a figura 51 seguinte mostra.

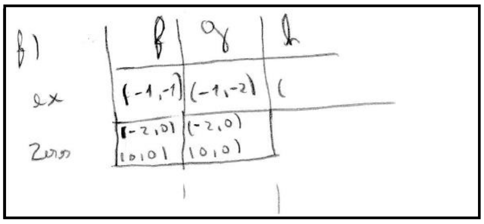

d) As ordenadas mudam, o mínimo relativo e absoluto também e o vértice da função

e) As ordenadas mudam, o mínimo relativo, o absoluto também e o vértice da função

Figura 51 – Resolução de Martim da questão $1d)$ e $1e)$ da ficha de trabalho n.º 3

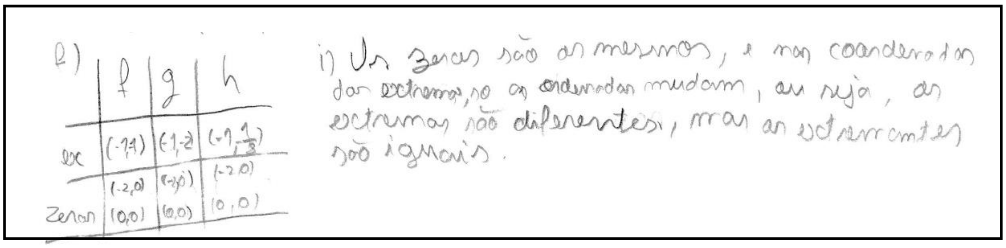
Apesar de ambas as respostas serem muito idênticas, Martim conseguiu fazer uma distinção entre as mudanças que ocorreriam globalmente ao gráfico e as mudanças que ocorriam localmente, nomeadamente ao mínimo absoluto e relativo e ao vértice da parábola. Luís, na resposta que deu, mencionou todos os elementos como se fossem variados, havendo desta forma vários extremos e vários vértices.

Relativamente à questão $1f)$, na qual está presente a representação numérica, ambos os alunos iniciaram a construção da tabela, contudo Luís não a terminou e apenas Martim respondeu à questão $1f)i)$, que se destinava a relacionar os valores presentes na mesma. As resoluções de ambos os alunos poderão ser vistas em baixo, nas figuras 52 e 53.


f)

	f	g	h
ex	(-1,-1)	(-1,-2)	(
Zeros	(-2,0) (0,0)	(-2,0) (0,0)	

Figura 52 – Resolução de Luís da questão $1f)$ da ficha de trabalho n.º 3


f)

	f	g	h
ex	(-1,-1)	(-1,-2)	(-1,-1/3)
Zeros	(-2,0) (0,0)	(-2,0) (0,0)	(-2,0) (0,0)

i) Os zeros são os mesmos, e nas coordenadas dos extremos, as ordenadas mudam, ou seja, os extremos são diferentes, mas os extremantes são iguais.

Figura 53 – Resolução de Martim da questão $\boldsymbol{1f)}$ e $\boldsymbol{1f)i)}$ da ficha de trabalho n.º 3

Martim percebe claramente que a transformação em causa irá afetar as ordenadas dos pontos do gráfico, em relação aos pontos do gráfico de f. Este indica que apesar de os extremos se alterarem os extremantes irão manter-se iguais. Martim, tal como Maria, revela aqui conseguir mobilizar conhecimentos adquiridos previamente, conseguindo estabelecer a relação entre o extremo e o extremante.

No que diz respeito à contração e dilatação horizontal, as questões $2b)$ e $2c)i$ serão agora analisadas e que estão dentro dos mesmos parâmetros que as questões analisadas anteriormente. Nem Martim nem Luís conseguiram terminar estas duas questões.

Luís, tal como a figura 54 mostra, construiu a tabela mas não concluiu a alínea $i)$. Luís conseguiu indicar corretamente os zeros e os extremos, apesar de escrever os zeros como coordenadas depois de ter sido alertado em aula que os zeros correspondem ao valor da função quando esta atinge o valor zero. As conclusões tiradas por Luís dizem respeito apenas à primeira linha da tabela, na qual o aluno afirma que os "extremos são os mesmos".

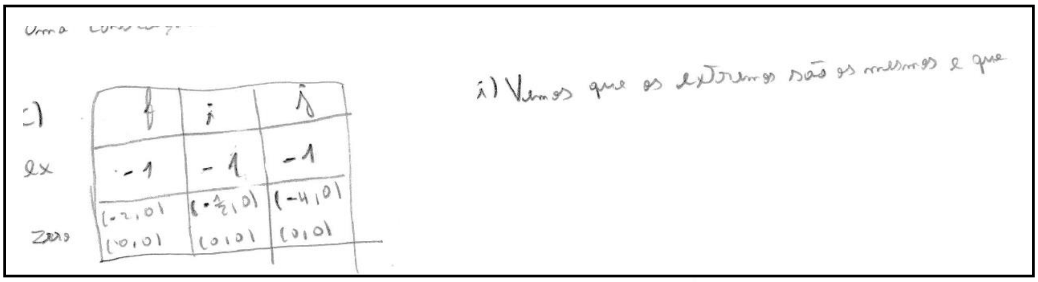


Figura 54 – Resolução de Luís da questão $2b)i)$ da ficha de trabalho n.º3

Martim somente conseguiu contruir a tabela, não tendo conseguido tirar conclusões da mesma. Ao contrário do seu colega Luís, Martim construiu corretamente a tabela considerando os zeros como valores e não como coordenadas. No entanto, em termos de correção de linguagem, o aluno deveria ter usado chavetas curvas. A figura 55 seguinte mostra a resolução de Martim.

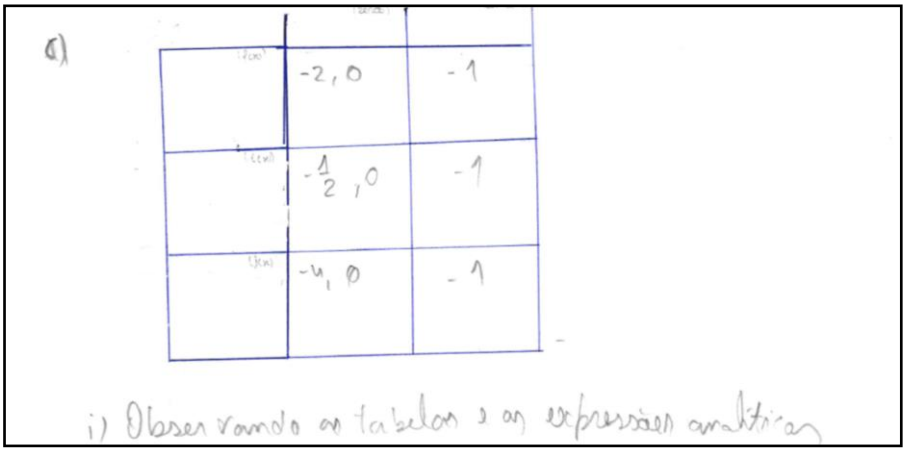


Figura 55 – Resolução de Martim da questão $2b)i)$ da ficha de trabalho n.º3

Ficha de Avaliação (anexo 4)

Na questão 2, Luís recorreu a várias representações para justificar a opção escolhida. Este utilizou a representação algébrica e numérica para obter a resposta certa, tal como pode ser visto na figura seguinte.

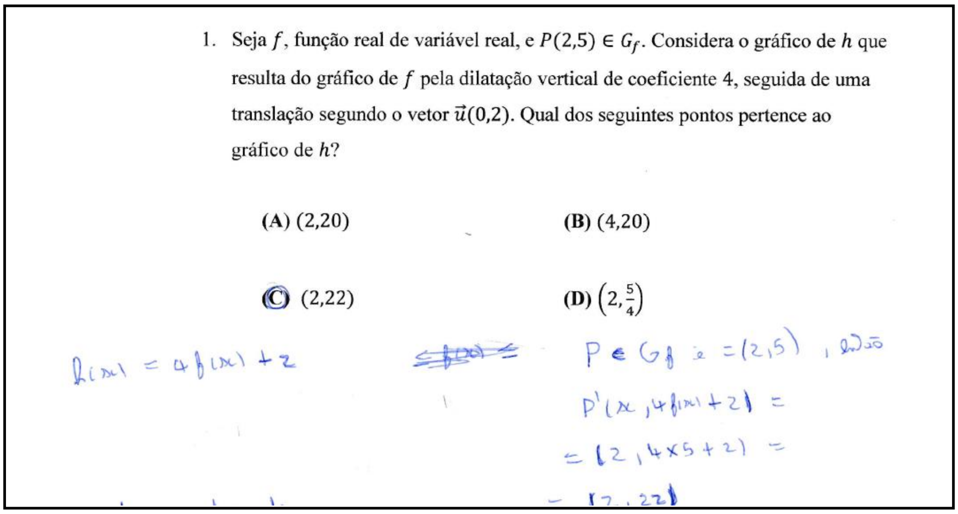
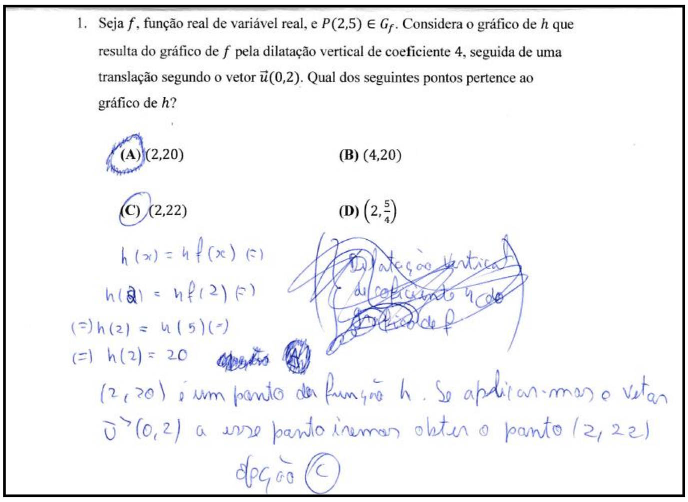


Figura 56 – Resolução de Luís da questão **2** da ficha de avaliação

Do lado esquerdo, é possível visualizar a relação que Luís faz entre as transformações em causa e a expressão analítica da função h. Luís percebe que a dilatação vertical de coeficiente 4 irá alterar as imagens da função e, consequentemente as ordenadas dos pontos do gráfico, como se vê do lado direito. Luís consegue expressar-se matematicamente ao considerar um ponto genérico e escrever, de uma forma geral, as operações que modificarão as ordenadas associadas a uma abcissa genérica. O mesmo acontece com a translação efetuada, uma vez que

Luís identifica esta translação como sendo vertical e que a mesma irá influenciar as ordenadas dos pontos, adicionado às mesmas duas unidades.

Por fim, Martim, conseguiu identificar acertadamente a opção correta, tal como podemos ver na figura 57.



1. Seja f, função real de variável real, e $P(2,5) \in G_f$. Considera o gráfico de h que resulta do gráfico de f pela dilatação vertical de coeficiente 4, seguida de uma translação segundo o vetor $\vec{u}(0,2)$. Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de h?

(A) (2,20) **(B)** (4,20)

(C) (2,22) **(D)** $\left(2, \frac{5}{4}\right)$

$h(x) = 4f(x) \Leftrightarrow$

$h(2) = 4f(2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(2) = 4(5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(2) = 20$ ~~opção~~ ~~(A)~~

~~Dilatação vertical de coeficiente 4 do gráfico de f~~

(2,20) é um ponto da função h. Se aplicar-mos o vetor $\vec{u}(0,2)$ a esse ponto iremos obter o ponto (2,22)

Opção (C)

Figura 57 – Resolução de Martim da questão 2 da ficha de avaliação

Inicialmente Martim tinha optado pela opção (A), provavelmente por não ter reparado que depois da dilatação vertical ocorria uma translação vertical. Este acabou por perceber que ocorreu uma composição de transformações e colocou a opção (C), como se vê na sua reposta.

Martim recorreu à representação algébrica para calcular a imagem de 2 por meio da nova função que resultaria das transformações indicadas. Este considerou algebricamente as mudanças que ocorreriam ao gráfico de f depois de este ser transformado por meio da dilatação vertical de coeficiente 4, explicitando que a referida transformação faria com que, algebricamente, o coeficiente em causa multiplicasse a expressão analítica de f. Após ter calculado o ponto do gráfico obtido por meio da dilatação, teve em conta a translação vertical, obtendo o ponto pedido corretamente. Nesta última fase de resolução, Martim não apresenta cálculos afirmando apenas que, com o vetor em causa se obtém o ponto pretendido.

Na questão 3, Luís, como se pode ver na figura 58, percebeu que os objetos da função f seriam setes vezes menores que os objetos da função g e, por isso, mesmo estabeleceu uma relação entre os objetos de ambas as funções. Para Luís os objetos de f correspondem a $\frac{1}{7}$ dos objetos da função g.

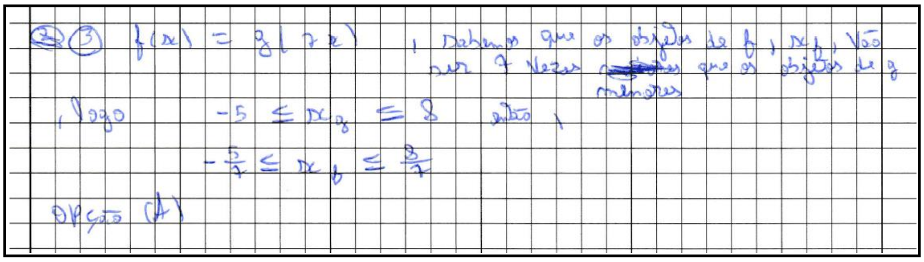


Figura 58 – Resolução de Luís da questão 3 da ficha de avaliação

Desta forma, o aluno enquadrou o domínio de g e obteve o domínio de f, multiplicando os extremos do domínio de g por $\frac{1}{7}$. É de realçar que Luís revela algumas dificuldades com a linguagem matemática ao tentar enquadrar o domínio da primeira função. Em primeiro lugar, Luís escreve x_g e x_f, algo que está incorreto visto g e f não correspondem a índices, mas sim a funções. Depois ao enquadrar, Luís ao multiplicar -5 e -8 por $\frac{1}{7}$ deveria ter multiplicado esta constante pelo argumento que se encontra entre os sinais da desigualdade.

Por sua vez, Martim, identificou a transformação como sendo uma dilatação horizontal, multiplicando os extremos por 7. A figura seguinte corresponde à resolução de Martim. A resolução de Martim (figura 59) mostra que o aluno não compreendeu que no caso horizontal, o coeficiente da transformação corresponde ao inverso do número que está a multiplicar no argumento da função inicial que, neste caso, é 7.

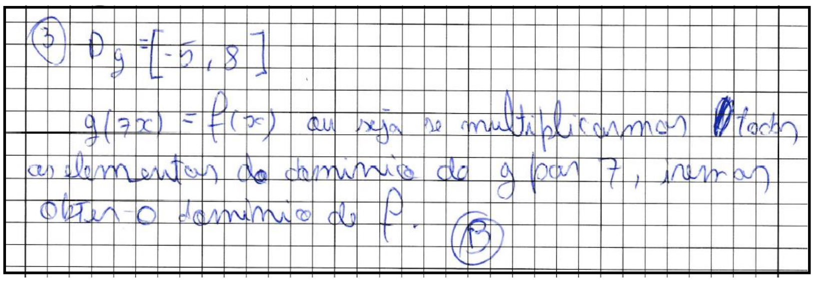


Figura 59 – Resolução de Martim da questão 3 da ficha de avaliação

A questão 1 da II parte da ficha de avaliação foi respondida por Luís, mas não por Martim. Luís respondeu corretamente a esta questão, mas não apresentou nenhuma justificação, tal como pode ser visto na figura 60.

Figura 60 – Resolução da questão 1 da II parte da ficha de avaliação

Entrevista (anexo 6.1.)

A entrevista realizada a Luís e Martim mostrou, mais uma vez, que os alunos revelam dificuldades no tema da contração e dilatação. Luís ao indicar a transformação associada afirmou tratar-se de uma contração. De facto, este começou por justificar as suas conclusões com o recurso aos pontos fornecidos pelo enunciado, $(0,3)$ e $(0,5)$, no entanto, não consegue obter conclusões coerentes, tal como pode ser observado de seguida:

Professora Marisa: Então Luís, como pensaste?

Luís: Eu olhei para um dos zeros de f e de g que indicam no enunciado. No caso do zero de f seria $(0,3)$ e no caso de g seria $(0,5)$, então olhei…

Professora Marisa: Luís que pontos são esses? Anota-me no gráfico que pontos são esses que falaste?

Luís: São estes…(Luís indica corretamente no gráfico os pontos pedidos, como se pode ver na figura X abaixo)

Professora Marisa: Isso são zeros?

Luís: Ah não…Então corrigindo, eu olhei para dois pontos que nos indicavam no enunciado que, no caso de f seria $(0,3)$ e no caso de g seria $(0,5)$, então reparei que olhando para o ponto de f e para o ponto de g reparei que houve uma contração vertical de coeficiente $\frac{2}{5}$. E eu supos que fosse $\frac{2}{5}$ porque olhei desde a origem até a um ponto mais alto de g então fui supor que fosse $\frac{2}{5}$. Então depois pus que $g(x) = \frac{2}{5} f(x)$ e depois substitui a expressão de f.

Professora Marisa: Então tu dizes que é uma contração?

Luís: Sim…

Professora Marisa: Então mas vertical ou horizontal?

Luís: Ahh…Desculpe professora então não pode ser uma…(Luís ficou um tempo sem dizer nada)

Professora Marisa: E tu, Martim, como pensaste?

Martim: Então eu fui ver a expressão de f… pronto também não me ajuda muito. Depois fui ver os pontos, o ponto de g e de f e depois fui ver o gráfico e percebi que deste gráfico (aponta para o gráfico de f) para este gráfico (aponta para o gráfico de g) houve uma dilatação a nível vertical e depois calculei o coeficiente que era $\frac{5}{3}$.

Professora Marisa: E como calculaste esse valor? O 5 e o 3 vêem de onde?

Martim: Para o ponto $(0,3)$ passar para o ponto $(0,5)$ tem de se multiplicar por $\frac{5}{3}$.

Professora Marisa: Exatamente. E o que é que se vai alterar do gráfico da f para o gráfico da g?

Martim: Todos os pontos, a ordenada vai ser multiplicada por $\frac{5}{3}$.

Fazendo uma análise mais pormenorizada ao excerto da entrevista descrito anteriormente, Luís começou por fazer confusão com os zeros e os máximos de uma função, tendo sido uma dificuldade que rapidamente se ultrapassou depois de eu lhe ter pedido para indicar no gráfico os pontos que este estava a mencionar. Para identificar a transformação, Luís não foi capaz de perceber que se tratava de uma dilatação. Este acabou por não explicar como chegou ao valor $\frac{2}{5}$ e quando questionado sobre se a contração seria vertical ou horizontal, Luís acabou por ficar em dúvida relativamente à resposta que tinha dado anteriormente. No entanto, Luís foi capaz de obter uma expressão analítica válida ao indicar que o coeficiente que considera será multiplicado pela função $f(x)$. Mais à frente, pude perceber que Luís confundiu os gráficos com a parábola que tinha sido falado em aula e que trouxe, na altura dúvidas a vários alunos. A parábola suscitou muitas dúvidas a Luís, pois esta quando contrai verticalmente, dilata horizontalmente, deixando o aluno confuso. Este aspeto foi discutido no final da entrevista com Luís e Martim.

Martim foi ao encontro do que era esperado, tendo conseguido identificar a transformação em causa e a expressão analítica da nova função. Este aluno recorreu muito à visualização e à informação que lhe foi dada, conseguindo identificar a transformação através dos gráficos fornecidos e calcular o coeficiente associado. A justificação dada por Martim mostra ainda que o aluno foi capaz de perceber o que realmente acontece ao gráfico de f depois de ser transformado e de que forma o coeficiente influencia a mudança.

Na alínea b), Martim conseguiu também identificar corretamente a transformação associada e reconhecer as alterações que ocorreriam ao gráfico de f:

Professora Marisa: E a b) Martim?
Martim: Na b) coloquei uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$.
Professora Marisa: E o que é que ocorre ao gráfico de f?
Martim: Todas as suas imagens vão ser multiplicadas por $\frac{1}{2}$.
Professora Marisa: Sim e, em termos gráficos?
Martim: Vai contrair, vai ficar mais pequeno.

Esta foi uma questão que acabou por ser respondida apenas pelo Martim, tendo Luís concordado com o que o seu colega respondeu. Como esta última questão apenas foi respondida por Martim, pedi ao Luís para responder à questão seguinte.

Na alínea c), Luís foi capaz de identificar corretamente a transformação em causa e o coeficiente associado, afirmando que ocorria uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{5}$. Ao tentar explicar o que aconteceria ao gráfico de f depois de este ser sujeito à referida transformação, Luís afirma que:

Luís: …Todos os pontos seriam mudados nas abcissas, ficando mais pequenos por $\frac{1}{5}$.
Professora Marisa: O que vai acontecer ao gráfico? Como o nome indica vai…
Luís: Contrair.

Nesta questão, ao contrário da questão 3, Luís não demonstrou ter dificuldade em expressar a transformação associada ao gráfico transformado.

5.2.3. Reflexão

Ficha de Trabalho n.º 5 (anexo 2.5.)

A primeira alínea da questão $1d$) teve como intenção levar os alunos a explorar a transformação *reflexão* de uma dada função. A figura 61 seguinte mostra a exploração que Martim efetuou no Geogebra.

Figura 61 – Exploração de Martim da questão 1 da ficha de trabalho n.º 5, no Geogebra

Perante esta exploração, Martim foi respondendo às questões seguintes. A alínea ii), na qual pedia para comparar os dois gráficos, o da função f e o da sua transformada, foi respondida tanto por Luís como por Martim. Ambos responderam exatamente igual, visto nesta aula os dois alunos terem feito em conjunto. Luís e Martim ao compararem os dois gráficos constatam que “a função g é o simétrico da função f”, tal como pode ser visto nas figura 62 e 63.

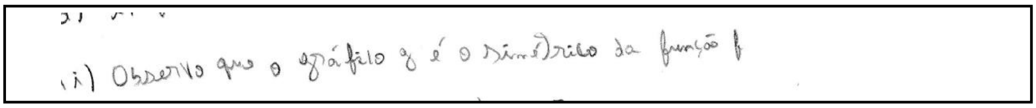

ii) Observo que o gráfico g é o simétrico da função f

Figura 62 – Resolução do Luís da questão $\mathbf{1}\boldsymbol{d})\boldsymbol{ii})$ da ficha de trabalho n.º **5**

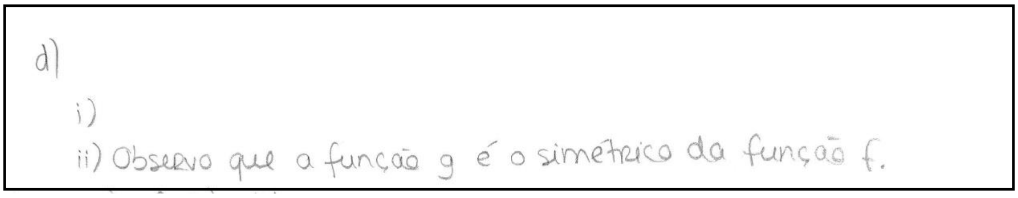
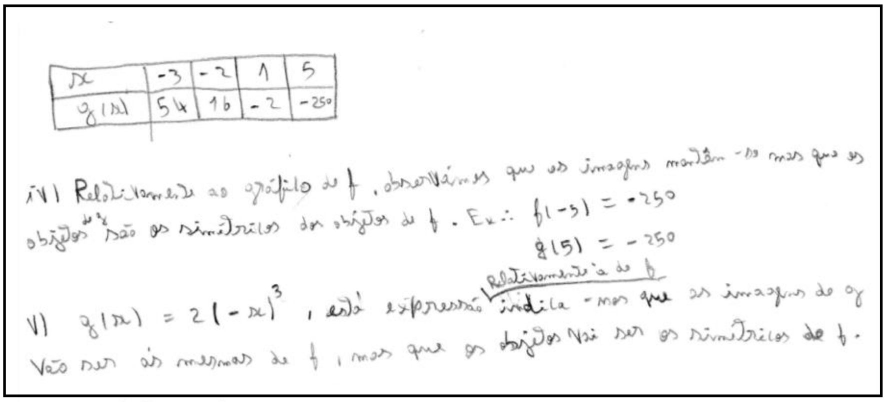

d)
i)
ii) Observo que a função g é o simetrico da função f.

Figura 63 – Resolução de Martim da questão $1d)ii)$ da ficha de trabalho n.º 5

Apesar de Luís e Martim terem resolvido ao mesmo tempo, ambos os alunos deram respostas diferentes. Luís refere-se a "gráfico" e a "função" dizendo que são simétricos, enquanto que Martim menciona os termos "gráfico" e "função" ao mesmo tempo dizendo que são simétricos. Tanto Luís como Martim revelam algumas dificuldades em perceber que as transformações são efetuadas aos gráficos das funções.

Nas questões seguintes, Luís e Martim apresentaram as seguintes respostas (figura 64 e 65).

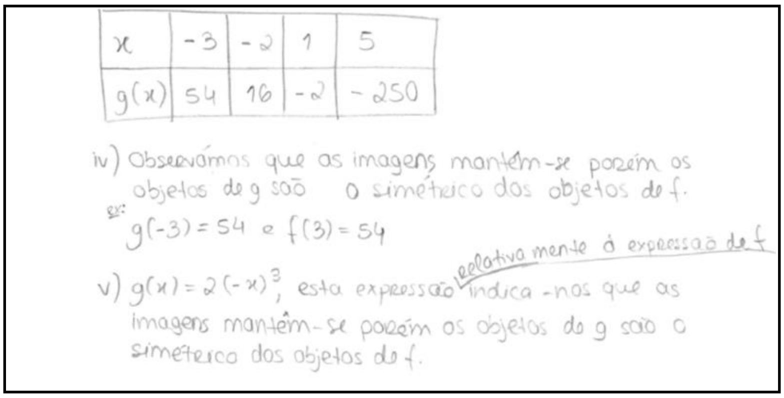


x	-3	-2	1	5
$g(x)$	54	16	-2	-250

iv) Relativamente ao gráfico de f, observámos que as imagens mantêm-se mas que os objetos de g são os simétricos dos objetos de f. Ex.: $f(-3) = -250$
$g(5) = -250$

Relativamente à de f
v) $g(x) = 2(-x)^3$, esta expressão indica - mas que as imagens de g vão ser as mesmas de f, mas que os objetos vai ser os simétricos de f.

Figura 64 – Resolução de Luís das questões $1d)iv)$ e $1d)v)$ da ficha de trabalho n.º 5



x	-3	-2	1	5
$g(x)$	54	16	-2	-250

iv) Observámos que as imagens mantém-se porém os objetos de g são o simétrico dos objetos de f.
ex: $g(-3) = 54$ e $f(3) = 54$

v) $g(x) = 2(-x)^3$, esta expressão relativamente à expressão de f indica-nos que as imagens mantêm-se porém os objetos de g são o simeterco dos objetos de f.

Figura 65 – Resolução de Martim das questões $1d)iv)$ e $1d)v)$ da ficha de trabalho n.º 5

As resoluções de Luís e Martim vão ao encontro do que era esperado. Os alunos conseguiram entender que entre as duas tabelas construídas, uma na questão $1c)$ e outra na questão $1d)iii)$, havia uma diferença nos objetos das duas funções e que as imagens se mantinham. A descrição seguinte corresponde a um pequeno diálogo feito entre estes dois alunos durante a aula.

Martim: Observamos que o simétrico…por exemplo…Para o simétrico dos objetos
Luís: em g…
Martim: …obtemos a mesma imagem…
Luís:…em f…
Martim: Espera aí, mas isto assim não fica bem.
Luís: Então dizemos: como sabemos que a função… Ao chegar a conclusão que a função g é o simétrico de f, sabemos que pegando nos objetos de f e fazendo seu inverso…
Martim: simétrico.
Luís: simétrico, enganei-me…vamos obter as imagens.

Este diálogo retirado através dos registos de áudio realizado durante as aulas mostrou que os alunos adquirem a aprendizagem esperada, percebendo que para imagens iguais serão obtidos objetos simétricos para as funções f e g. Contudo, estes apercebem-se que revelam algumas dificuldades com a linguagem, tentando arranjar formas diferentes de dar uma resposta correta e percetível. No final, os alunos completam a sua resposta com um exemplo.

A questão seguinte, alínea v), solicita ao aluno que justifique a expressão analítica de g. Luís e Martim conseguem perceber que é ao argumento da função que é aplicado o simétrico e que isso irá produzir objetos simétricos para imagens iguais.

No que diz respeito à reflexão segundo o eixo das abcissas, a questão 2 procurou que os alunos explorassem essa mesma função. A figura 66 seguinte representa a resolução de Luís. Martim respondeu exatamente da mesma maneira.

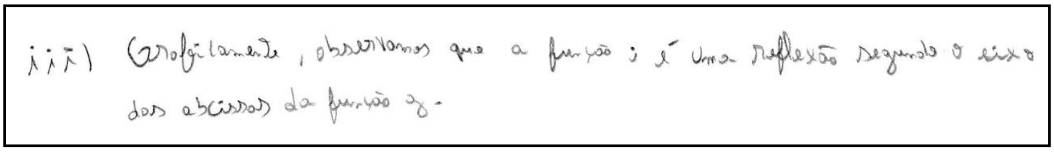
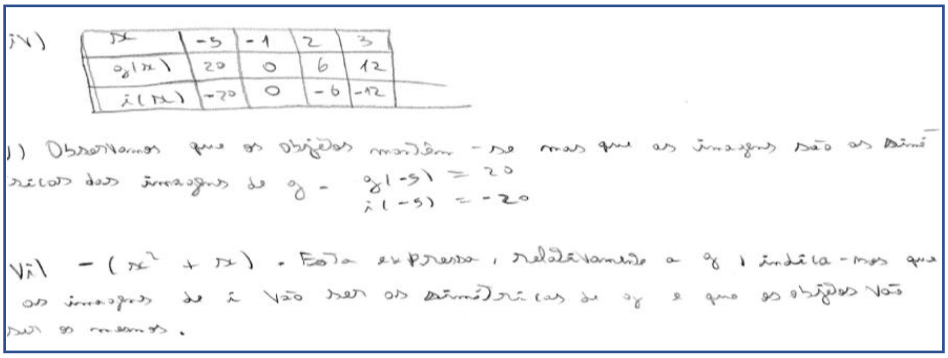

iii) Graficamente, observamos que a função i é uma reflexão segundo o eixo dos abcissas da função g.

Figura 66 – Resolução de Luís da questão $2b)iii)$ da ficha de trabalho n.º5

Relativamente à questão 1, referente à reflexão segundo o eixo das ordenadas, a presente resposta já inclui uma linguagem mais própria. Nesta fase, a primeira questão já tinha sido corrigida, pelo que os alunos já conseguiram responder de forma mais correta a alínea $iii)$ da questão $2b)$. No entanto, ainda é visível aqui uma incorreção relativamente à linguagem quando os alunos afirmam que existe uma simetria em relação às funções.

As alíneas seguintes, $2b)v)$ e $2b)vi)$ resolvidas por ambos os alunos e apresentadas na figura 67, mostram que os alunos conseguiram adquirir as aprendizagens esperadas. Neste caso, ambos conseguiram perceber que iria haver uma diferença nas imagens de ambas as funções, f e g, havendo uma simetria relativamente ao eixo das abcissas, tal como mostra a resolução mostrada anteriormente.


iv)

x	-5	-1	2	3
$g(x)$	20	0	6	12
$i(x)$	-20	0	-6	-12

v) Observamos que os objetos mantêm-se mas que as imagens são os simétricos das imagens de g. $g(-5) = 20$
$i(-5) = -20$

vi) $-(x^2 + x)$. Esta expressão, relativamente a g, indica-nos que as imagens de i vão ser os simétricos de g e que os objetos vão ser os mesmos.

Figura 67 – Resolução de Luís e Martim das questões $2b)iv), 2b)v)$ e $2b)vi)$ da ficha de trabalho n.º5

Capítulo 6

Conclusões

6.1. Síntese do estudo

O presente trabalho, realizado no ano letivo de 2017/2018 numa turma de 10.º ano do Instituto de Ciências Educativas, incide sobre a compreensão que os alunos desta turma revelam das transformações geométricas dos gráficos de funções, no contexto da subunidade de ensino, *propriedades geométricas dos gráficos de funções*, com recurso à tecnologia. Assim sendo, e de forma a poder focar-me em aspetos que considerei fundamentais, formulei três questões de estudo:

- Quais os significados que os alunos atribuem às diferentes transformações geométricas do gráfico de uma função?
- Como os alunos relacionam a transformação geométrica do gráfico com a expressão algébrica da função, no caso de gráficos obtidos por:
  -Translação?
  -Contração e dilatação?
  -Reflexão?
- Que dificuldades revelam os alunos nas transformações de gráficos de funções, ao longo da subunidade de ensino?

No decurso da subunidade de ensino, os alunos trabalharam principalmente em grupo ou em pequenos grupos e recorreram ao *software* de geometria dinâmica, o Geogebra, e à calculadora gráfica. Para que fosse possível recolher dados e evidências que me permitissem dar resposta às questões formuladas, apliquei uma metodologia qualitativa interpretativa. No decorrer das aulas lecionadas por mim, recolhi os ficheiros Geogebra, bem como todas os registos escritos desenvolvidos pelos alunos em cada aula, tendo incentivado os mesmos a justificarem sempre as suas respostas. O registo áudio e vídeo também foi utilizado nestas aulas, durante o trabalho autónomo dos alunos e a discussão realizada em grupo-turma. Posteriormente à lecionação realizei uma entrevista com os dois pares de alunos escolhidos.

6.2. Principais conclusões do estudo

No presente subcapítulo focar-me-ei em dar resposta às questões deste estudo, baseando-me na análise que efetuei dos dados que fui recolhendo ao longo da minha intervenção. Deste modo, dividi este subcapítulo em duas partes, uma parte referente à primeira questão e uma segunda parte que diz respeito à segunda questão. A terceira questão do estudo, referente às dificuldades apresentadas pelos alunos, irá ser respondida de forma transversal nas duas primeiras questões.

Quais os significados que os alunos atribuem às diferentes transformações geométricas do gráfico de uma função?

Perante a análise efetuada das resoluções dos quatro alunos escolhidos, verifica-se que, no geral, os significados que estes atribuem às diferentes transformações geométricas são idênticos. Ambos os pares analisados recorreram a conhecimentos relacionados com as funções e os respetivos gráficos, nomeadamente os zeros, extremos, domínio e contradomínio de uma função para caracterizar as transformações que ocorrem. Alguns autores, nomeadamente Walle, Lovin, Karp e Bay-Williams (2014) associam a compreensão a ideias pré-existentes, conectando-as com a nova informação. Neste caso, os alunos comparam o gráfico de uma função e do gráfico transformado, baseando-se no que aprenderam anteriormente.

No que diz respeito à representação gráfica, os alunos perante o *software* Geogebra conseguiram aperceber-se do que ia acontecendo ao gráfico quando este sofria uma determinada transformação. No caso da translação os alunos recorriam aos termos "deslocou-se para baixo", "deslocou-se para a direita", "ocorre uma translação segundo o vetor $(2,0)$". Na contração/dilatação, os alunos não mencionaram um termo exato relativamente a este tipo de transformação, estando apenas mais focados em identificar o que acontece ao gráfico depois de este ser transformado. Só quando a dilatação e contração vertical foram abordadas em turma, os alunos utilizaram os termos "contração" e "dilatação". Na transformação reflexão, os alunos afirmavam que ocorria uma "reflexão dos valores, ou seja os valores são simétricos" e que "a função g é o simétrico da função f" ou "o gráfico de g é simétrico ao da função f".

Relativamente à análise que os alunos fizeram de certos pontos particulares, nomeadamente os pontos relativos aos extremos e zeros, mostraram que estes conseguiram estabelecer uma relação entre os pontos pertencentes ao gráfico inicial e ao seu transformado, percebendo as operações numéricas associadas e as implicações que advêm de cada transformação. Tal como Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) afirmam, os diferentes conceitos devem relacionar-se, de forma a que haja um conhecimento mais profundo.

Ao longo das aulas, os alunos conseguem perceber que as coordenadas vão sendo modificadas e que alteração terá o vetor ou o coeficiente nas mesmas. O caso vertical torna-se o mais simples para os alunos. A translação vertical segundo um certo vetor é bem compreendida por parte dos mesmos, conseguindo perceber que as ordenadas referentes aos pontos do gráfico transformado resultam da adição entre a componente do vetor associado à ordenada e as ordenadas dos pontos do gráfico inicial. A contração e dilatação vertical também se torna muito intuitiva para estes quatro alunos. Estes conseguem perceber que multiplicando o coeficiente associado às referidas transformações e as ordenadas dos pontos é possível obter os novos pontos do gráfico transformado. O diálogo entre Júlio e Maria, descrito no capítulo anterior, no qual Júlio se apercebe que uma dilatação não poderia estar associada a um coeficiente menor do que 1, mostra que ambos perceberam que tal situação iria provocar nos pontos do gráfico valores mais pequenos numa das coordenadas. Por sua vez, Luís e Martim realçam ao longo da entrevista um aspeto que vai ao encontro da "parábola ser contraintuiva para os alunos"(Zazkis, Liljedahl & Gadowsky, 2003). Tanto Luís como Martim revelaram alguma confusão quando visualizam a parábola contraída/dilatada no gráfico, mostrando que revelam alguma dificuldade em perceber que tipo de contração/ dilatação ocorre, vertical ou horizontal. Perante uma contração horizontal (dilatação horizontal), os alunos tendem a pensar que ocorre uma dilatação vertical (contração vertical), pois o gráfico acaba por ficar mais "encolhido" verticalmente ("encolhido" verticalmente).

A ficha de avaliação realizada pelos alunos também mostrou que os alunos entendem que uma transformação no gráfico, definido por uma função de domínio limitado, irá influenciar o mesmo. Júlio, numa das questões analisadas no capítulo anterior, não identificou corretamente a transformação e apenas alterou o extremo inicial do domínio da função inicial. Por sua vez, Maria, apesar de identificarem erroneamente a transformação ocorrida, efetuam as alterações necessárias ao domínio da função inicial. Martim cometeu o mesmo erro que Maria e Luís foi o único que conseguiu obter o domínio correto.

Na transformação relativa à reflexão, ambos os pares foram capazes de identificar as alterações que ocorrem a um gráfico que sofre este tipo de transformação.

Júlio recorre ao termo "reflexão dos valores, ou seja os valores são simétricos" para explicitar o que acontece quando o gráfico é refletido. Apesar da dificuldade de Júlio em expressar-se corretamente, este percebe que existe uma simetria quando o gráfico é refletido. Mais tarde, Júlio já se expressa melhor associando a "uma reflexão do gráfico sobre o eixo O_x". Maria conseguiu, ao contrário de Júlio, explicar o que acontece aos valores de cada uma das funções quando determinado tipo de reflexão ocorre.

Luís e Martim, tal como Júlio e Maria, também foram capazes de adquirir aprendizagens relativamente ao que a transformação reflexão implica, percebendo no caso de existir uma reflexão segundo o eixo das abcissas, as imagens da função serão alteradas relativamente à função inicial. Ao mesmo tempo as imagens manter-se-ão se o gráfico da função for refletido segundo o eixo das ordenadas.

Como os alunos relacionam a transformação geométrica do gráfico com a expressão algébrica, no caso de gráficos obtidos por:

- *Translação?*
- *Contração e Dilatação?*
- *Reflexão*

No caso da *translação vertical*, que se tornou bastante intuitiva, os quatro alunos participantes foram capazes de identificar a expressão algébrica da função, bem como perceber perante a visualização do gráfico que transformação ocorria. Durante o primeiro contacto que os alunos tiveram com esta transformação, estes foram capazes de identificar logo de seguida a expressão algébrica da função associada ao gráfico transformado. Também durante as entrevistas realizadas ambos os pares foram capazes de indicar a expressão algébrica visualizando os dois gráficos, o inicial e o seu transformado. Estes, ao perceberem que o gráfico se deslocara na vertical, compreenderam que as ordenadas seriam diferentes no novo gráfico, pois como disse Martim "o gráfico deslocou-se no eixo O_y". Tal como afirma, Borba e Confrey (1996) quando são efetuadas mudanças no eixo $\mathrm{O_y}$ o valor a somar está fora da expressão.

Relativamente à *translação horizontal*, os alunos mostraram que recorrem muito à memorização, aspeto este que é muito discutido pelos autores. Borba e Confrey (1996) afirmam que os alunos identificam a expressão algébrica relativa à transformação horizontal quando esta sofre alteração nos parâmetros. No caso de Luís e Martim, este último afirmou ao longo da entrevista que "no x tenho de mudar os sinais", referindo-se à expressão da função representada pelo gráfico transformado. Nesta fase, Martim tinha verificado na calculadora gráfica que a expressão que indicara não reproduzia a transformação no gráfico que era pedida no enunciado, neste caso que o gráfico fosse deslocado para a direita duas unidades. Este foi um dos casos em que o aluno recorre à memorização e a sua intuição não vai ao encontro da transformação correta. Contudo, na ficha de avaliação o mesmo aluno já conseguiu identificar corretamente a expressão associada a uma translação horizontal. Luís, por sua vez, na entrevista identificou uma expressão algébrica associada a uma função que tinha sido transformada por meio de uma translação vertical. Perante a visualização do gráfico da função que tinha considerado, não conseguiu perceber o erro que tinha cometido afirmando que o gráfico que tinha na calculadora correspondia ao gráfico transformado por meio da translação horizontal de vetor $(2,0)$. Ao contrário do que aconteceu na ficha de avaliação, Luís mostrou, perante a translação horizontal, que a expressão algébrica da função transformada iria, em relação à função inicial, ter alterações no argumento da função.

Por fim, Júlio na entrevista identifica uma expressão algébrica que corresponde à expressão da função inicial multiplicada por -2. O aluno justificou esta expressão dizendo que ocorria uma translação nos objetos. Ao visualizar o gráfico na calculadora, Júlio percebe que a expressão que considerou não é a correta e que aos objetos da função é necessário subtrair duas unidades. Contudo, o aluno intuitivamente afirmou de início que as duas unidades seriam adicionadas em vez de serem subtraídas. Mais uma vez, o exemplo de Júlio, evidencia que a translação horizontal torna-se pouco intuitiva, contrariando assim as expectativas dos alunos (Fischbein, 1987, citado em Zazkis, Liljedahl & Gadowsky, 2003). Ao invés do que se passou na entrevista, Júlio na ficha de avaliação mostrou não ter dificuldade em apresentar a expressão algébrica de uma função representada por um gráfico obtido por meio de uma translação horizontal.

No caso de Júlio e Maria, esta última, na entrevista, apercebe-se que existe uma mudança no sinal relativamente à direção da transformação. No entanto, a expressão algébrica que Maria menciona não traduz uma translação horizontal, mas sim uma translação vertical. Depois de visualizar o gráfico, na calculadora gráfica, da função transformada que tinha considerado Maria apercebeu-se que o mesmo não reproduzia a transformação mencionada no enunciado, conseguindo logo de seguida identificar a expressão algébrica correta. Na ficha de avaliação, Maria percebe que a translação horizontal pressupõe uma mudança no argumento da função, no entanto, esta não identifica corretamente a expressão algébrica associada ao gráfico transformado.

Em relação à contração e dilatação vertical e horizontal, os alunos tendem, mais uma vez, a revelar mais dificuldades no caso horizontal. Ao longo das entrevistas, foi possível perceber que, no geral, os quatro alunos entrevistados foram conseguindo em identificar a expressão algébrica associada, principalmente no caso vertical.

Por um lado, Maria identificou, perante o gráfico visualizado que ocorria uma contração horizontal, quando na verdade ocorria uma dilatação horizontal. Maria justificou a sua resposta como pensando que seria ao contrário, afirmando que confundia o caso vertical com o horizontal. No entanto, Maria conseguiu identificar a expressão algébrica associada à função transformada e que a referida transformação faria aumentar as imagens e, consequentemente, dilatar o gráfico. Por sua vez, Júlio identificou claramente a transformação e a expressão algébrica associada à função do gráfico transformado.

Numa das questões abordadas ao longo da entrevista, Maria e Júlio identificaram uma dilatação horizontal e Maria afirmou que o coeficiente em causa seria inferior a 1, deixando Júlio na dúvida. Este perante a incoerência que Maria mencionou, entre a transformação identificada por ambos e o coeficiente referido por Maria, apercebeu-se que o coeficiente iria fazer diminuir o valor das abcissas do gráfico da função inicial, fazendo com que o gráfico contraísse e não dilatasse. Este raciocínio feito por Júlio tornou-se uma mais valia para que ambos conseguissem estabelecer relação entre a transformação que ocorre ao gráfico e a expressão algébrica da função representada pelo gráfico transformado. É de realçar que, na ficha de avaliação, Maria revela exatamente a mesma dificuldade, mencionando que ocorre uma dilatação ao mesmo tempo que identifica um coeficiente menor do que 1. Este aspeto vem reforçar o que a aluna afirmou anteriormente quando mencionou que pensava ser ao contrário, sem perceber a razão de isso acontecer. Por sua vez, Júlio na ficha de avaliação não revelou dificuldades neste tipo de transformações.

Luís mencionou que a transformação em causa seria uma contração horizontal, identificando, aquando da expressão algébrica da função do gráfico transformado, um coeficiente menor do que 1. Apesar de Luís ter revelado dificuldade em identificar a referida transformação, o coeficiente identificado por este tornou-se coerente com a transformação que o mesmo mencionou. Por seu turno, Martim não revelou dificuldades em identificar a transformação e a referida expressão algébrica.

O par Luís e Martim não revelou dificuldades em relacionar a expressão algébrica da função com a transformação em causa, ao longo da entrevista. No entanto, na ficha de avaliação Martim revelou dificuldades em identificar a transformação contração horizontal associada a uma determinada expressão algébrica.

Na transformação reflexão, ambos os pares conseguiram relacionar a expressão algébrica da função correspondente ao gráfico transformado com a referida transformação. Tanto um par como o outro perceberam quais os valores que iriam ser diferentes e que implicações tal teria na nova função.

No geral, os dois pares de alunos revelaram, tal como mencionado em cima, compreender melhor o caso vertical, tendo sido possível obter respostas mais eficazes e mais seguras neste caso. Notou-se que os alunos conseguiam, intuitivamente, identificar e compreender tanto a translação vertical como a contração e dilatação vertical. No que diz respeito às transformações horizontais, os alunos revelaram mais dificuldades. Por um lado, a afirmação "no x é necessário mudar os sinais…" revela que os alunos tendem a não perceber o que realmente acontece neste tipo de transformação. Ao mesmo tempo, mostra que de facto torna-se contraintuitivo para os alunos a expressão algébrica da função do gráfico transformado com a transformação horizontal que ocorre (Faulkenberry & Faulkenberry, 2010).

Apesar desta dificuldade por parte dos alunos no caso horizontal, a tecnologia teve ao longo do decurso desta subunidade de ensino um papel importante. Tal como mencionado anteriormente, os alunos, à exceção de Luís, perante o gráfico visualizado na calculadora gráfica conseguiram identificar os erros cometidos. Esta ferramenta é tida como importante e realçada por muitos autores mencionados no capítulo referente ao enquadramento teórico. Segundo Anabousy e Daher (2015) o Geogebra ajuda os alunos a visualizar transformações de gráficos de funções, bem como ajudar a perceber a noção de função (Zulnaidi & Zakaria, 2012, citados em Daher & Anabousy, s.d.).

Por último, segundo Sierpinska (1990), existem quatro atos de compreensão: a *identificação,* a *discriminação,* a *generalização e a síntese.* Da análise realizada concluiu-se que os alunos revelaram um nível de compreensão relativamente às transformações de gráficos de funções que se situa principalmente nos dois primeiros atos, sendo que se verificam dificuldades da sua parte no ato da *generalização.* O ato da *identificação* é visível quando os alunos são capazes de identificar as características da nova função, referente ao gráfico transformado, e de relacioná-las com a função do gráfico inicial. Ao mesmo tempo que as identificam, os alunos conseguem categorizá-las por transformação, associando cada mudança a uma determinada transformação. No entanto, os alunos revelam alguma dificuldade em generalizar quando se pretende que relacionem a expressão algébrica com a transformação ocorrida, mostrando que, por vezes, torna-se mais complexo associar as alterações que decorrem das transformações com a expressão algébrica. Contudo, Júlio conseguiu, tal como mencionado em cima, relacionar o que acontecia aos pontos do gráfico transformado e as respetivas implicações para a expressão algébrica da função do gráfico transformado.

6.3. Reflexão final

Como futura professora, a intervenção realizada por mim permitiu-me ter consciência de aspetos fundamentais que um professor deve ter em conta ao longo da sua atividade profissional. O professor depara-se com inúmeras situações inesperadas, sendo importante estar preparado para as ultrapassar.

A pesquisa sobre o tema que foi lecionado durante a intervenção letiva foi realizada antes da mesma ser planificada. Esta primeira abordagem foi essencial para que pudesse tomar as decisões mais sensatas a ter em cada aula lecionada por mim. As dificuldades previstas, por muitos autores, permitiram-me desde logo estar mais atenta em aula e a ter mais atenção na adaptação das tarefas propostas.

Primeiramente, o tema das funções e da geometria, dois temas que separados, se tornam complexos para os alunos, a junção dos mesmos torna-se ainda mais difícil para os mesmos e desafiante para mim, enquanto professora.

Tal como alguns autores mencionam, tudo o que envolve o caso horizontal torna-se pouco intuitivo para os alunos, fazendo deste um desafio que tentei enfrentar ao longo da minha intervenção. Este pressuponha que abordasse este tema envolvendo a visualização e relacionasse a representação gráfica com a representação algébrica. Contudo, os alunos revelaram dificuldades em compreender por que razão certas funções tinham determinado comportamento quando os seus gráficos sofriam transformações horizontais.

A preparação prévia da parte do professor é um aspeto fundamental a ter em conta para que uma aula possa correr da melhor forma possível, tornando-se os planos de aula uma mais valia para quem vai lecionar. Ao longo da minha intervenção, os planos de aulas contruídos por mim permitiram-me refletir acerca das ações necessárias e importantes a ter no decurso de uma aula. Ao mesmo tempo permitiu-me, enquanto professora, refletir sobre o papel do aluno em cada aula, prevendo algumas das suas ações e dificuldades. Tudo isto possibilitou-me estar muito mais atenta a dificuldades já esperadas por parte dos alunos. Contudo, não deixo de realçar as dificuldades que não foram previstas por mim e que, de alguma forma, me deixaram com mais pressão no decurso da aula. A componente da planificação torna-se também muito importante na medida em que nos ajuda a criar um fio condutor entre cada uma das aulas, ajudando-nos a refletir sobre o que em cada aula é mais oportuno lecionar.

No entanto, nem tudo o que é esperado acontece numa sala de aula e, por vezes, como futura professora deparei-me com uma dificuldade que se torna difícil contornar por ser limitada, o tempo. O tempo é um aspeto importante e que comprometeu um pouco a minha intervenção letiva. O tempo previsto para cada aula não foi cumprido, devido, por um lado, ao ritmo mais demorado que os alunos apresentavam na elaboração de cada tarefa e, por outro, à dimensão das tarefas que apresentei. Apesar de ter consciência de que as tarefas apresentadas eram um pouco extensas, não julguei que a turma, que já conhecia, levasse tanto tempo a realizá-las. Desta forma, as aulas que por mim estavam planificadas tiveram de ser reajustadas e repensadas para que, no tempo que me estava destinado, conseguisse lecionar a subunidade de ensino.

Ao longo destes últimos dois anos, deparei-me com duas realidades importantes no ensino da Matemática: as tarefas exploratórias e a tecnologia.

A utilização da tecnologia nestas aulas lecionadas foi uma componente essencial no decorrer destas aulas. Em primeiro lugar, este *software* não era conhecido pelos alunos e revelou ser um elemento motivador na aprendizagem desta turma. Os momentos de trabalho autónomo realizados com o Geogebra proporcionaram momentos de dispersão, na medida em que, muitas das vezes havia grupos que não avançavam por terem de esperar que os restantes grupos terminassem a tarefa proposta, de modo a que mesma fosse discutida de igual forma por todos os grupos.

Ainda assim, considero que estes momentos de trabalho autónomo em que a tecnologia está presente foram fundamentais e, como futura professora, tentarei incentivá-los noutras ocasiões. No entanto, penso que seja mais benéfico que este tipo de trabalho, conjuntamente com a tecnologia, não seja realizado em aulas seguidas. No final da minha intervenção, deparei-me com a situação que os alunos não consolidavam tão bem os conteúdos lecionados nas aulas, ainda que lhes fosse pedido para trabalho de casa a resolução de alguns exercícios que envolviam os tópicos abordados em aula. Desta forma, considero que teria sido benéfico realizar algumas aulas de consolidação antes de abordar uma nova transformação com o Geogebra. Realço ainda que a utilização deste *software* em sala de aula tornou-se um obstáculo para mim devido à posição em que o projetor se encontrava. Este projetava para o quadro, tendo o painel do projetor ficado à frente do quadro, impossibilitando-me de utilizar este último recurso.

Relativamente às tarefas exploratórias implementadas no decurso da presente subunidade letiva, estas não faziam parte do tipo de tarefas às quais os alunos desta turma estavam habituados. Como professora, propor tarefas deste tipo e que fossem acompanhadas pela utilização do Geogebra, constitui mais um elemento motivador aos alunos desta turma. Conhecendo já as dificuldades que os alunos desta turma enfrentam, construí as tarefas de forma mais orientada e com mais questões para que os alunos não tivessem perguntas de resposta muito aberta.

Outro aspeto que considero crucial no decurso da lecionação é a reflexão das aulas que deve ser feita. Sendo a avaliação um elemento que deve ter como objetivo a tomada de decisões futuras, a reflexão que é feita no fim de cada aula é uma forma de avaliar o desempenho do aluno, mas também o da professora. Deste modo, é dada a oportunidade à professora de refletir a sua prática letiva e alterar metodologias e abordagens que ajudem o aluno a enfrentar as suas dificuldades e a ter uma aprendizagem mais duradoura.

Em suma, como futura professora considero essencial ter consciente os seguintes aspetos: a planificação, as dificuldades esperadas e a reflexão que deve ser feita após cada aula. De forma a colmatar as dificuldades dos alunos e a motivar a aprendizagem dos mesmos, a utilização de tarefas diversas pode ajudar a construir uma abordagem mais dinâmica e a ajudar o aluno obter uma compreensão mais eficaz e duradoura. Tenho consciência, que apesar das planificações elaboradas pelo professor, nem sempre o que é esperado se realiza e que é necessário estar alerta e pronto para situações menos esperadas. O tempo torna-se para mim, enquanto futura professora, um desafio. Por um lado é necessário ter consciência do tempo que existe para a lecionação de cada subunidade, por outro considero fundamental que os alunos possam conseguir adquirir as suas aprendizagens com calma. Cabe-me a mim articular o tempo que existe, de modo a que tudo seja cumprido e a que os alunos possam ultrapassar as suas dificuldades.

Referências

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* (1ª edição). Universidade Aberta.

Anabousy A., Daher W., & Baya'a, N. (2014). Conceiving function transformations in different representations: middle school students working with technology. *Mathematics Education, 9*(2), 99-114.

Ashcraft, M. H. (2002). Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11*(5), 181-185.

Baker, B., Hemenway, C. & Trigueros, M. (2001). On transformations of basic functions. In Chick, H., Stacey, K., Vincent J. & Vincent, J. (eds.), *Proceedings the* 12^{th} *ICMI Study Conference* (pp. 41-47). Melbourn, Australia.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K.(1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borba M. & Confrey J. (1996). A student´s construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics, 31,* 319-337.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e Desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Consciência, M., & Oliveira, H. (2011). Function concept and transformations of functions: The role of the graphic calculator. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (orgs.), *Proceedings of the Seventh Congress the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2218-2227). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów, ERME.

Costa, M. M. R. (2016). *Exploração das propriedades das transformações de gráficos de funções com o auxílio do Geogebra* (Relatório de estágio do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e Secundário). Universidade de Aveiro, Aveiro.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research.* (4ª edição). Lincoln: University of Nebraska.

Daher, W. M., & Anabousi, A. A. (2015). Student´s Recognition of Function Transformations' Themes Associated with the Algebraic Representation. *REDIMAT, 4*(2), 179-194.

Direção Geral da Educação (s.d.). Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A. Lisboa: Direção Geral da Educação.

Dias, S. & Santos, L. (2008). Avaliação reguladora, Feedback escrito, Conceitos Matemáticos: Um triângulo de Difícil Construção. In Projeto AREA (pp. 500-514)

Faulkenberry, E. D., & Faulkenberry, T. J. (2010). Transforming the way we teach function transformations. *Mathematics teacher, 104*(1), 29-33.

Fuson, K. C. & Beckmann, S. (2013). Standard Algorithms in the Common Core State Standards. *Mathematics Education Leadership, 14*(1), 14-30.

Gafanhoto, A. P. & Canavarro, A. P. (2011). Representações múltiplas de funções em ambiente com geogebra: um estudo sobre o seu uso por alunos de 9.º ano. In Atas do EIEM -*Ensino e Aprendizagem da Álgebra* (pp. 125-148). Pòvoa do Varzim: SPIEM

Hunting, R. P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *Journal of Mathematical Behavior 16* (2), 145-165.

IEUL (2016). Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Diário da República, 2.ª série - N.º 52 - 15 de março de 2016.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L., & Silva, A.P. (2017). *Máximo* (1.ª ed., Vols. 1-2). Porto: Porto Editora.

Costa, B. & Rodrigues, E. (2017). *Novo Espaço* (1.ª ed., Vols. 1-2). Porto: Porto Editora.

MEC (2014). *Programas e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: MEC.

Mwakapenda, W. (2004)). Understanding student understanding in mathematics. *Pythagoras*, *60*, 28-35.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática.* Lisboa: APM.

Oliveira, H. & Domingos, A. (2008). *Software no ensino e na aprendizagem da matemática: Algumas ideias para discussão.* In A. P. Canavarro, D. Moreira & I. Rocha (Orgs.), Tecnologias e Educação Matemática (pp. 279-285). Lisboa: SEM-SPCE.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29-53.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Eds.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-27). Lisboa: IEUL.

Ponte, J.P., Mata-Pereira, J. & Henriques, A. (2008). O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Praxis educativas, 7*(2). 356-377.

Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine S. C. & Beilock, S. L. (2013). Math Anxiety, Working Memory, and Math Achievement in Early Elementary School. *Journal of Cognition and Development, 14*(2), 187-202.

Saraiva, M. J., Teixeira, A. M. & Andrade, J. M. (2010). *Estudo das funções no programa de Matemática A com problemas e tarefas de exploração: Tarefas para o 10.º e 11.º anos do Ensino Secundário - Materiais de apoio*. Lisboa: Projeto IMLNA, APM.Semana, S. & Santos, L. (2008). A Avaliação e o Raciocínio Matemático. *Educação e Matemática,* 108, 52-60.

Sever, G. & Yerushalmy, M. (2007). To sense and to visualize functions: The case of graph stretching. In CERME 4 (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.1509-1518). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-36.

Smith, H. H. (2009). *Teaching and Learning Function Transformations*. Tempe, Arizona: Arizona State University.

Steffe, L. P., Nesher, P., Cobb, P., Sriraman, B. & Greer, B. (1996). *Theories of Mathematical Learning*.

Taylor, J. (2013). *Translation of Function: A Study of Dynamic Mathematical Software and Its Effects on Students Understanding of Translation of Function.* EUA: University of Wyoming.

Van de Walle, J. A., Lovin, L. H., Karp, K.S. & Bay-Williams, J. M. (2014). *Teaching Student-Centered Mathematics: Developmentally Appropriate Instruction for Grades Pre-K-2* (vol.1). Edinburgh Gate: Pearson.

Zazkis R., Liljedahl P. & Gadowsky G. (2003). Conceptions of function translation: obstacles, intuitions, and rerouting. *Journal of Mathemathical Behavior*, *22*, 437-450.

Anexos

Anexos 1 **- Fichas de Trabalho**

Anexo 2.1. – Ficha de Trabalho n.º 1

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de gráficos de funções

10.º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias — Ficha de Trabalho nº 1

Nome: ____ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções – Translação vertical e horizontal

Antes de iniciares a resolução da ficha de trabalho, cria uma pasta no teu *Ambiente de Trabalho* com o nome “Translação vertical e horizontal”. De seguida abre um ficheiro de Geogebra, designando-o “Translação vertical” e guarda-o na pasta criada anteriormente. Resolve as seguintes questões recorrendo ao Geogebra, justificando sempre as tuas respostas. Vai gravando o que fizeres no Geogebra ao longo da realização da ficha.

1. Com a ajuda do Geogebra, representa a função real de variável real, definida por $f(x) = x^2$ de domínio $\mathbb{R}$.
   a) Indica o contradomínio e as coordenadas do vértice da função f.

   b) Quanto(s) zero(s) tem a função f? Indica-o(s).

   c) Desloca o gráfico da função f quatro unidades para baixo.

i. Que alterações ocorreram depois de deslocares o gráfico da função f?

ii. Indica o domínio, o contradomínio, o(s) zero(s), o(s) extremo(s) e as coordenadas do vértice da nova função obtida.

d) Determina as imagens, por meio da função f, referentes aos objetos $-4, -3, -2, 0, 1, 3, 4$. Constrói uma tabela com estes dados.

e) Constrói uma tabela com os objetos indicados na alínea anterior, mas considerando agora o novo gráfico que obtiveste na alínea c.

i. Observando as duas tabelas, quais foram os valores que se alteraram?

ii. Que alteração ocorreu em cada um desses valores?

f) Escreve a expressão analítica da nova função obtida. Justifica, relacionando com as alíneas anteriores.

Antes de iniciares a questão 2, grava o ficheiro do Geogebra que trabalhaste na questão 1, na pasta "Translação vertical e horizontal".

Para resolveres a questão 2, abre uma nova página no Geogebra, dando-lhe o nome "Translação horizontal". Resolve as seguintes questões, justificando sempre as tuas respostas.

2. Considera, de novo, a função real de variável real, $f(x) = x^2$ de domínio $\mathbb{R}$, definida anteriormente.

a) Com a ajuda do Geogebra, desloca o gráfico da função f três unidades para a direita.

i. Que alterações ocorreram depois de efetuares a deslocação do gráfico de f.

ii. Indica o(s) zero(s), o(s) extremo(s) e as coordenadas do vértice do gráfico transformado.

b) Indica as imagens, por meio da função f, dos objetos -4,-3,-2,-1,0. Constrói uma tabela com todos os valores obtidos.

c) Indica agora as imagens, por meio do novo gráfico obtido, dos objetos $-2, -1, 0, 1$, construindo uma tabela.

   i. Através da observação da primeira tabela, qual é a imagem de -4, por meio da função f?
   ii. Observando agora a segunda tabela, será que existe algum objeto com a mesma imagem?
   iii. Quantas unidades é necessário adicionar ou subtrair para o objeto encontrado anteriormente ser igual a -4?
   iv. Verifica esta situação para outros pontos e regista-os.

h) Escreve a expressão analítica da nova função obtida. Justifica-a, relacionando com as alíneas anteriores.

3. Utilizando o Geogebra e a função dada anteriormente, desloca o gráfico da função f, quatro unidades para a direita e duas unidades para cima.

   i. Que alterações ocorreram ao gráfico de f depois das transformações que efetuastes?
   ii. Indica as coordenadas do vértice da parábola.
   iii. Indica o contradomínio da nova função.
   iv. Escreve a expressão analítica da nova função obtida. Como relacionas a expressão obtida com o vértice e as transformações efetuadas?
   v. Qual é o sentido da concavidade da Parábola?

Adapado de Smith (2009) e Costa (2016)

Anexo 2.2. -Ficha de Trabalho n.º 2

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de gráficos de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias Ficha de Trabalho nº 2

Nome: ______________________________ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções – Translação vertical e horizontal

Resolve as seguintes questões justificando sempre que possível as tuas respostas.
Poderás recorrer à calculadora gráfica.

1. Considera a função real de variável real $g(x) = x^3 - 3x$ de domínio $[-2,2]$ e contradomínio $[-15,15]$.

    a) Com a ajuda da calculadora gráfica, faz uma representação gráfica da função.

    b) Quanto(s) zero(s) tem a função g? Indica as suas coordenadas.

    c) Indica as coordenadas do(s) extremo(s) da função g.

    d) Supõe que o gráfico da função g é deslocado para a esquerda cinco unidades. Indica a expressão analítica do gráfico da nova função, designando-a por h e representando-a na calculadora gráfica.

        i. Será que o domínio e o contradomínio se alteraram em relação à função g? Se sim, indica-os.

ii. Indica as coordenada(s) do(s) zero(s) e do(s) extremo(s) da função h.

iii. Houve alguma alteração relativamente às coordenadas do(s) extremo(s) e ao(s) zero(s) de g? Se sim, quais foram?

e) Supõe agora que o gráfico da função g é deslocado duas unidades para baixo. Indica a expressão analítica do gráfico da nova função, designando-a por j.

i. Será que o domínio e o contradomínio se alteraram em relação à função g? Se sim, indica-os.

ii. Indica as coordenadas do(s) zero(s) e o(s) extremo(s) da função j.

iii. Houve alguma alteração relativamente ao(s) extremo(s) e ao(s) zero(s) de g? Se sim, quais foram?

Adaptado de Costa (2016)

Anexo 2.3. – Ficha de Trabalho n.º 3

INSTITUTO DE
CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de gráficos de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias Ficha de Trabalho nº3

Nome: ______________________________ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções – Contração e dilatação

Cria uma pasta no teu *Ambiente de Trabalho* com o nome "Contração e dilatação". Abre um ficheiro Geogebra, designando-o "Contração e dilatação vertical". Guarda na pasta que criaste anteriormente. Resolve as seguintes questões recorrendo ao Geogebra e justificando sempre as tuas respostas.

1. Seja f, a função real de variável real, definida por $f(x) = x^2 + 2x$.

   a) Recorrendo ao Geogebra, representa graficamente a função f, indicando o domínio e o contradomínio.

   b) Determina o(s) zero(s) e o(s) extremo(s) da função f.

   c) Representa graficamente as seguintes funções no Geogebra e indica o domínio, o contradomínio e o(s) zero(s) e extremo(s) de cada uma das funções:

      i. $g(x) = 2f(x)$

      ii. $h(x) = \frac{1}{8}f(x)$

d) Observando a representação gráfica da função g, e comparando com a representação gráfica da função f, que alterações ocorrem?

e) E em relação à função h, que alteração verificas?

f) Considera o(s) zero(s) e o(s) extremo(s) das funções f, g, h. Elabora uma tabela com as coordenadas do(s) pontos do gráfico correspondentes ao(s) extremo(s) e zero(s) das funções f, g, h.

   i. Que relações consegues encontrar entre o(s) zero(s) e o(s) extremo(s) das funções g e h relativamente aos da função f?

   ii. Escreve a expressão analítica das funções g e h. Justifica cada uma delas, a partir da tabela que construíste anteriormente.

> Antes de iniciares a segunda questão, não te esqueças de gravar o ficheiro da questão anterior.
>
> Para a questão 2, abre uma nova página do Geogebra, designando-a de "Contração e dilatação horizontal". Guarda este ficheiro na pasta que criaste. Resolve as seguintes questões, justificando sempre as tuas respostas.

2. Seja f, uma função real de variável real, definida por $f(x) = x^2 + 2x$. Considera a representação gráfica obtida anteriormente no software Geogebra.

   a) Representa as seguintes funções no Geogebra e determina o(s) zero(s) e o(s) extremo(s) das funções i e j definidas por:

      i. $i(x) = f(4x)$

      ii. $j(x) = f(\frac{1}{2}x)$

   b) Observando a representação gráfica das funções i e j, que alterações ocorrem relativamente ao gráfico de f?

   c) Considera o(s) zero(s) e o(s) extremo(s) das funções $f, i\ e\ j$. Elabora uma tabela com as coordenadas do(s) pontos do gráfico correspondentes aos zero(s) e extremo(s) das funções f, i e j.

i. Que relações consegues encontrar entre as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico correspondentes aos zero(s) e as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico correspondentes ao(s) extremo(s) das funções i e j relativamente aos da função f?

ii. Escreve a expressão analítica das funções i e j. Justifica cada uma delas a partir da tabela que construíste anteriormente.

Adaptado de Costa (2016)

Anexo 2.4. – Ficha de Trabalho n.º 4

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias Ficha de Trabalho nº 4

Nome: ______________________________ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções – Contração e dilatação

Resolve as seguintes questões recorrendo à calculadora gráfica sempre que te for pedido. Justifica sempre todas as tuas respostas.

1. Considera a função real de variável real, definida por $f(x) = 2x^3 - 5x^2$.

   a) Representa a função f, utilizando a calculadora gráfica.

   b) Determina o(s) zero(s) e a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) extremo(s)

   c) Representa as seguintes funções no Geogebra e determina o(s) zero(s) e a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) do gráfico correspondentes aos extremo(s).

      i. $j(x) = 3f(x)$
      ii. $z(x) = \frac{1}{6}f(x)$
      iii. $w(x) = f(5x)$
      iv. $h(x) = f(\frac{1}{7}x)$

d) Indica a transformação que permita obter o gráfico de $j. z. w$ e h a partir do gráfico de f.

Adaptado de Costa (2016)

Anexo 2.5. – Ficha de Trabalho n.º 5

INSTITUTO DE
CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de gráficos de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias Ficha de Trabalho nº 5

Nome: ____ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções – Reflexão

Antes de iniciares a resolução da ficha de trabalho, abre um ficheiro de Geogebra e grava-o com o nome "Reflexão" e guarda-o no *Ambiente de Trabalho*. Não te esqueças de ir gravando ao longo da realização da ficha.
Resolve as seguintes questões recorrendo ao Geogebra, justificando sempre as tuas respostas.

1. Considera a função real de variável real $f(x) = 2x^3$.

   d) Com a ajuda do Geogebra, faz uma representação gráfica da função f.

   e) Indica o domínio, o contradomínio e o(s) zero(s) da função f.

   f) Determina as imagens de $-5, -1,2,3$ por meio da função f.

   g) Considera a função $g(x)= f(-x)$.

      i. Representa a função g no Geogebra.

      ii. Compara o gráfico da função g com o da função f. O que observas?

iii. Determina as imagens de $-3; -2; 1; 5$ por meio da função g. Constrói uma tabela com os valores encontrados.

iv. Compara os valores da alínea c) com os que encontraste na alínea anterior. O que observas?

v. Escreve a expressão analítica da função g. Justifica a tua resposta, relacionando-a com as alíneas anteriores.

e) Seja $h(x) = f(-2x)$.

i. Faz uma representação gráfica da função h.

ii. Indica uma sequência de transformações que permita obter o gráfico de h a partir do gráfico de f.

2. Considera agora uma nova função g, definida por $g(x) = x^2 + x$.

f) Indica o domínio, o contradomínio, os zero(s) e os extremo(s) de g.

g) Seja $i(x) = -g(x)$.

i. Representa a função i no Geogebra.

ii. Indica o domínio, o contradomínio, o(s) zero(s) e o(s) extremo(s) de i.

iii. Que diferenças verificas no gráfico de i relativamente ao gráfico da função g?

iv. Determina as imagens de $-5; -1; 2; 3$ por meio da função g e por meio da função i. Constrói uma tabela com os valores encontrados.

v. Compara as imagens obtidas anteriormente por meio de g e de i. O que observas?

vi. Escreve a expressão analítica da função i. Justifica a tua resposta, relacionando com as conclusões que foste retirando das alíneas anteriores.

f) Seja $j(x) = -\left(\frac{1}{5}\right) g(x)$.

i. Faz uma representação gráfica da função j.

ii. Indica uma sequência de transformações que permita obter o gráfico de j a partir do gráfico de g.

Adaptado de Costa (2016)

Anexo 2.6. – Ficha de Trabalho n.º6

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de gráficos de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias | Ficha de Trabalho nº 6

Nome: ______________________________ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções – Função Par e Ímpar

Resolve as seguintes questões recorrendo à calculadora gráfica sempre que te for pedido. Justifica todas as tuas respostas.

3. Considera a função f $r.v.r$, definida por $f(x) = x^2 + 1$.

   a) Representa graficamente a função f, na calculadora gráfica.

   b) Indica o domínio e contradomínio de f.

   c) A função f é injetiva? Explica.

   d) Representa a função $g(x) = f(-x)$ na calculadora gráfica. O que é possível observar?

   e) Explica que relação existe entre as funções g e f.

4. Seja h a função $r.v.r$, definida por $h(x) = x^3 + x$. Representa-a graficamente na calculadora gráfica.

a) Representa na calculadora gráfica, a reflexão do gráfico da função h segundo o eixo das abcissas.

   i. Utilizando a calculadora gráfica, indica as imagens de $-3, -1, 0, 2, 4$ por meio da nova função referida na alínea anterior.
   ii. Escreve a expressão analítica dessa função, designando-a por i.

b) Faz agora a reflexão do gráfico da função h segundo o eixo das ordenadas.

   i. Indica as imagens de $-3, -1, 0, 2, 4$, por meio da nova função.
   ii. Escreve a expressão analítica dessa função, designando-a por j.

c) Que conclusões é possível retirar relativamente às imagens obtidas por meio da função i e por meio da função j.

Anexo 2.7. – Ficha de Trabalho n.º7

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de gráficos de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias Ficha de Trabalho nº 7

Nome: ______________________________ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções – Reflexão/ Função Par e Ímpar

Resolve as seguintes questões analiticamente, justificando sempre todas as tuas respostas.

1. Mostra se cada uma das funções $r.v.r$ seguintes é par ou ímpar.

   a) $f(x) = 5x^3 + 2x$
   b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
   c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$
   d) $f(x) = 2x^5 - 4x^3$

2. Seja f, a função definida por:

$$f: [0,5] \to [-3,7]$$
$$x \hookrightarrow 2x - 3$$

   Sabe-se que:

   - $D_g = D_f$ e $D_h = \{-x: x \in D_f\}$
   - $g(x) = -f(x)$ e $h(x) = f(-x)$

   a) Caracteriza as funções g e h.

b) Calcula $f(2) + g(4) + h(-3)$.

3. Considera a função f definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = x^2 + x^3$$

a) Mostra que a função f não é par nem ímpar.

b) Verifica que:

i. A função g definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

é uma função par.

ii. A função h definida, em $\mathbb{R}$ por:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

é uma função ímpar.

4. Seja a família de funções definidas em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = -x^2 + \frac{k}{2}x + k, k \in \mathbb{R}$$

Indica o valor de k para o qual a função f é uma função par.

Anexo 2.8. – Ficha de Trabalho de casa

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias Ficha de Trabalho

Nome: ______________________________ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções – Translação vertical e horizontal/ Contração e Dilatação vertical e horizontal

Resolve as seguintes questões justificando sempre que possível as tuas respostas.
Poderás recorrer à calculadora gráfica sempre que te for indicado.

2. Seja $G_f = \{(-3,2), (-1,4), (1,-1), (3,1)\}$ o gráfico da função f.

   a) Determina o gráfico da função g que é imagem do gráfico de f por meio da translação de vetor $\vec{u}(0,-4)$.

   b) Determina o gráfico da função h que é imagem do gráfico de f por meio da translação de vetor $\vec{v}(-2,0)$.

3. Considera a função f representada graficamente, na figura 1.

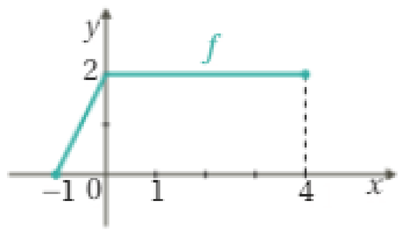


Figura 1

a) Indica o contradomínio e o zero da função f.

b) Indica o domínio da função h, sendo $h(x) = f(x - 5)$.

c) Indica o contradomínio da função g, sabendo que $g(x) = f(x) + 4$.

d) Indica os valores de a e b, sabendo que a função p definida por $p(x) = f(x - a)$ tem domínio $[-6, b]$.

e) Indica os valores que b pode tomar de modo que a função $r(x) = f(x) + b$ não tenha zeros.

f) Explica de que forma é possível obter a função m definida por $m(x) = f(x + 3) - \frac{1}{2}$, partindo do gráfico de f.

4. Considera as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 3$. Considera ainda, um ponto P do gráfico de f de abcissa 4.

a) Determina analiticamente as coordenadas do ponto Q, imagem de P, que é obtido pela translação de vetor $\vec{u}(0,3)$ e justifica que pertence ao gráfico de g.

b) Explica por que motivo da imagem de qualquer ponto do gráfico de f pela translação referida na alínea anterior é um ponto do gráfico de g.

5. Seja i a função definida por $i(x) = f(x + a) - b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e f é a função representada na figura 2.

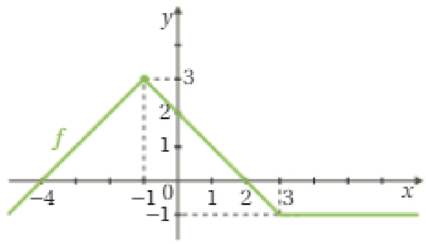


Figura 2

   a) Representa graficamente o gráfico da função i para $a = 1$ e $b = -2$, indicando o domínio e contradomínio.

   b) Indica os valores reais de a e de b para os quais a função i:
      i. Não tem zeros;
      ii. Tem uma infinidade de zeros;
      iii. Tem contradomínio $]-\infty, 0]$.

6. Considera a função $q(x) = x^3 - 16x^2 - 2037x - 5940$.

   a) Com o auxílio da calculadora gráfica, representa graficamente a função q. Faz um esboço da representação gráfica obtida.

   b) Indica dois valores possíveis para k, um valor positivo e outro negativo, de modo a que $q(x) + k$ tenha apenas um zero.

(Consciência &Oliveira, 2011)

7. Considera a função f de domínio $[-4,2]$ cujo gráfico cartesiano está representado na figura 1.

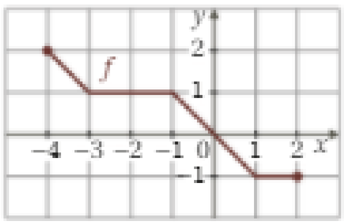


Figura 1

   a) Representa graficamente a função h definida por $h(x) = 2f(x)$.
   b) Indica o domínio da função h.

8. Seja $G_f = \{(-3,1), (-2,2), (1,-1), (3,2), (5,0)\}$ o gráfico de uma função f.

a) Representa num referencial as imagens dos pontos do gráfico cartesiano de f obtido pelas transformações ϕ e θ que ao ponto $P(x, y)$ do plano associam respetivamente o ponto:

   i. $P_1(x, 4y)$

   ii. $P_2(x, \frac{1}{5}y)$

b) Considera a função g, de domínio $\{-3, -2,1,3,5\}$, definida por $g(x) = 4f(x)$. Relaciona o gráfico cartesiano de g com a transformação ϕ e com o gráfico cartesiano de f.

c) Escreve uma expressão analítica para a função h cujo gráfico cartesiano é a imagem do gráfico cartesiano de f pela transformação θ.

8. Considera a função f, real de variável real. Sabe-se que:

- $f(x) = ax + b, \; a, b \in \mathbb{R}$.
- $D'_f = [-1,5]$

a) Determina o contradomínio das funções g e h definidas por:

   i. $g(x) = 2f(x)$, com $D_f = D_g$

   ii. $h(x) = 1 - 3f(\frac{x}{2})$ com $D_g = \{2x: x \in D_f\}$

Anexo 3 - Planificação das Aulas

Anexo 3.1. – Planificação da 1.ª aula

Plano de Aula

Instituto de Ciências Educativas Dia 23 de Abril de 2018 Aula de Matemática A - 10º CTA	**Sumário:** Transformações geométricas de gráficos de funções: Translação Vertical e Horizontal. Resolução de uma ficha de trabalho.

Tópicos

- Gráficos de funções obtidos por translação vertical
- Gráficos de funções obtidos por translação horizontal
- Relação entre as translações verticais e horizontais com o vértice de uma parábola

Principais Objetivos

- Representar, no Geogebra, o gráfico de uma função;
- Efetuar, no Geogebra, uma translação de um gráfico segundo um determinado vetor;
- Identificar o domínio, o contradomínio e as coordenadas dos pontos extremos e zeros do gráfico de uma função e do seu gráfico transformado, por meio de uma translação;
- Reconhecer que o gráfico da função $\boldsymbol{g}$ definida por $\boldsymbol{g(x) = f(x-c)}$ é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela translação de vetor $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{(c, 0)}, \boldsymbol{sendo\ c}$ um número real e $\boldsymbol{f}$ uma função real de variável real;
- Reconhecer que no caso da translação horizontal, em que $\boldsymbol{g(x) = f(x-c)}$ é imagem do gráfico de de $\boldsymbol{f}$ pela translação segundo o vetor $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{(c, 0)}$, o $\boldsymbol{D_g = \{x + c : x \in D_f\}}$;
- Reconhecer que no caso da translação vertical, em que $\boldsymbol{g(x) = f(x) + c}$ é imagem do gráfico de de $\boldsymbol{f}$ pela translação segundo o vetor $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{(0, c)}$, o $\boldsymbol{D_g = D_f}$;
- Reconhecer que o gráfico da função $\boldsymbol{g}$ definida por $\boldsymbol{g(x) = f(x) + c}$ é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela translação de vetor $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{(0, c)}, \boldsymbol{sendo\ c}$ um número real $\boldsymbol{f}$ uma função real de variável real;
- Reconhecer os gráficos de função obtidos por translação horizontal e vertical;

Capacidades Transversais

- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática;
- Desenvolver a autonomia e o trabalho colaborativo;
- Desenvolver a capacidade argumentativa e o sentido critico.

Recursos

- Quadro
- Manual
- Software Geogebra
- Ficha de trabalho
- Caderno
- Projetor
- Computador

Métodos de Trabalho a implementar na sala de aula

- Trabalho pares ou em grupo
- Grupo-Turma

Momentos da Aula

Momentos da Aula	Duração
• **Sumário**	5 minutos
• **Exploração do Geogebra**	5 minutos
• **Resolução da ficha de trabalho**	
✓ Resolução da questão 1 em grupo	15 minutos
✓ Discussão/Correção da questão 1 em grupo-turma	10 minutos
✓ Resolução da questão 2 em grupo	15 minutos
✓ Discussão/Correção da questão 2 em grupo-turma	10 minutos
✓ Resolução da questão 3 em grupo	10 minutos
✓ Discussão/Correção da questão 3 em grupo-turma	5 minutos
• **Sistematização das ideias sobre a translação vertical e horizontal**	15 minutos
	Total: 90 minutos

Desenvolvimento da Aula

A turma estará dividida em quatro grupos, de quatro a três elementos cada, sendo que a realização da ficha será feita de forma autónoma. A professora deverá salientar a importância da justificação dos cálculos e do raciocínio dos alunos ao longo da realização da ficha de trabalho, mencionando aos mesmos, que deverão resolver a ficha de trabalho numa folha à parte (dada pela professora), e recolhida no final da aula.

A professora deverá ainda chamar a atenção dos alunos, que sempre que utilizarem o GeoGebra, deverão criar uma pasta no Ambiente de Trabalho com o nome que está indicado na ficha de trabalho e, mais tarde, guardar o ficheiro de Geogebra com que estão a trabalhar nessa mesma pasta criada.

- **Exploração do Geogebra**

O software Geogebra não é conhecido por parte dos alunos, pelo que será feita uma breve exploração das ferramentas que os alunos utilizarão ao longo da subunidade. Esta breve exploração será feita pela professora através da projeção do programa Geogebra no quadro. Apenas serão mencionadas algumas ferramentas para que os alunos possam começar a trabalhar de forma autónoma no programa. Estes ao longo da aula também poderão ir explorando com a ajuda de um guião sobre o Geogebra fornecido pela professora.

- **Resolução da Ficha de Trabalho**

Enquanto os alunos resolvem a ficha de trabalho, a professora circulará pela sala para apoiar os mesmos, esclarecendo eventuais dúvidas que os alunos tenham e orientando os mesmos para o que é pedido em cada questão. Ao mesmo tempo será feita uma análise ao trabalho que cada grupo vai desenvolvendo, com o objetivo de ir tomando consciência do trabalho que os alunos vão desenvolvendo. Esta análise terá também como objetivo de selecionar as ideias principais que os alunos vão apresentando, de modo a serem discutidas mais tarde com a turma.

- **Discussão e correção da Ficha de Trabalho n.º 1**

A correção da ficha será feita em três momentos, sendo que cada questão será discutida e resolvida logo a seguir a os alunos terminarem a sua resolução. A correção será feita por um dos elementos do grupo que foi selecionado para apresentar a sua resposta. À medida que o aluno resolve no quadro, a professora vai interpelando-o acerca da forma como chegou às suas conclusões, questionando também os restantes alunos.

	<u>Atividade do aluno</u>	<u>Atividade da professora</u>
1.	**Proposta resolução:** a) $D'_f = [0; +\infty[$ Coordenadas do vértice do gráfico de f: (0,0) <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno confunde o domínio e o contradomínio. O aluno mostra dificuldade em encontrar as coordenadas do vértice do gráfico de f no GeoGebra. b) A função f tem apenas um zero {0}. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não se recorda do que é um zero numa função.	A professora circulará pela sala, de modo a apoiar e orientar o trabalho dos alunos. A professora interpela o aluno acerca da definição de domínio e contradomínio, assim como os valores e os eixos que correspondem a cada um deles: “O que é o domínio? E o contradomínio? Os objetos correspondem ao domínio ou ao contradomínio? E as imagens? Em que eixo se lê cada um deles?” A professora relembra que o manual distribuído tem a informação acerca de como encontrar o vértice no GeoGebra. A professora relembra ao aluno que o zero de uma função corresponde ao valor do eixo das abcissas quando o gráfico de f interseta o eixo O_x.

	c) i) O gráfico da função f deslocou-se quatro unidades para baixo. e/ou Todas as imagens correspondentes à função f alteram-se, mantendo-se o domínio. e/ou O contradomínio da função f alterou-se. ii) O domínio da nova função manteve-se igual ao domínio da função f. O contradomínio alterou-se, sendo agora de $[-4,+\infty[$. Zeros: $\{-2,2\}$ Coordenadas do vértice do gráfico transformado: $(0,-4)$.	A professora poderá ainda questionar acerca do eixo em que os zeros se encontram: "Em que eixo se encontra os zeros de uma função?"
	<u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno confunde o domínio e o contradomínio. O aluno mostra dificuldade em encontrar as coordenadas do vértice do gráfico de f no GeoGebra.	A professora interpela o aluno acerca da definição de domínio e contradomínio, assim como os valores e os eixos que correspondem a cada um deles: "O que é o domínio? E o contradomínio? Os objetos correspondem ao domínio ou ao contradomínio? E as imagens? Em que eixo se lê cada um deles?"

A professora relembra que o manual distribuído tem a informação acerca de como encontrar o vértice no GeoGebra.

d)

x	$f(x)$
-4	16
-3	9
-2	4
0	0
1	1
3	9
4	16

Possíveis dificuldades:

O aluno poderá não entender como fazer a tabela.

A professora afirma que a tabela terá de ter duas colunas, uma correspondente ao valor dos objetos, e outra com os valores das imagens.

A professora poderá mostrar a tabela que pretende que os alunos construam, no quadro.

e)

x	
-4	12
-3	5
-2	0
0	-4
1	-3
3	5
4	12

Possíveis dificuldades:

O aluno poderá não conseguir calcular o valor das imagens da função referente ao gráfico transformado.

A professora questiona o aluno sobre o que as imagens da função do gráfico transformado.

“Será que o valor das imagens se manteve, em relação à função f? Que alteração ocorreu?”

e)

i) Os valores alterados correspondem às imagens.

	ii) As ordenadas dos pontos deste novo gráfico, sofreram uma alteração. Assim sendo, as imagens dos objetos $\{-4,-3,-2,0,1,3,4\}$, segundo uma nova função (obtida graficamente pela translação do gráfico de f segundo o vetor $(0,-4)$), correspondem às imagens dos mesmos objetos segundo a função f, subtraídas de 4 unidades. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não entender a alteração que ocorreu.	 A professora questiona o aluno sobre a diferença entre valores correspondentes às imagens da função f e os valores correspondentes às imagens da nova função.
	f) Dado o conjunto de pontos do novo gráfico, $\{(-4,f(-4)-4),(-3,f(-3)-4),(-2,f(-2)-4),(0,f(0)-4),(1,f(1)-4),(3,f(3)-4),(4,f(4)-4),$ pode concluir-se que o novo gráfico será $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=f(x)-4\}$ Ou seja, $$f(x)-4=x^2-4$$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir escrever a expressão analítica pedida.	 A professora remete o aluno para as conclusões retiradas nas alíneas anteriores. O aluno poderá ser interpelado pela professora acerca do que representa $f(x)$: "O que representa $f(x)$? E a todas as imagens o que subtraímos?"
	a) i) O gráfico da função f deslocou-se três unidades para a direita. e/ou	

2.	Todos os objetos correspondentes à função f alteram-se na nova função, mantendo-se o contradomínio. e/ou O domínio também se mantém, em relação ao domínio de f, apesar de haver uma deslocação do gráfico horizontalmente. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá afirmar que o domínio se modifica, visto que a translação é feita horizontalmente.	A professora afirma que não será assim, direcionando o aluno para as questões seguintes.
	ii) Zeros: $\{3\}$ Extremos: Mínimo absoluto e relativo: $\{0\}$ Coordenadas do vértice do gráfico de f: $(3,0)$ <u>Possíveis dificuldades:</u> Análogo à alínea 1 a).	Análogo à alínea 1 a).
	b) x | $f(x)$: -4 | 16; -3 | 9; -2 | 4; -1 | 1; 0 | 0	
	<u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não entender como fazer a tabela.	A professora afirma que a tabela terá de ter duas colunas, uma correspondente ao valor dos objetos, e outra com os valores das imagens.

Tabela da alínea b):

x	$f(x)$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0

<table>
<tr><td></td><td></td><td>A professora poderá mostrar a tabela que pretende que os alunos construam, no quadro.</td></tr>
<tr><td></td><td>c)
<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr>
<tr><td>-2</td><td>25</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>16</td></tr>
<tr><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td></tr>
</table>

Possíveis dificuldades:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Tendo em conta que o aluno ainda não saberá a expressão que representa o novo gráfico, poderá ter dificuldades em encontrar os valores pedidos.</td><td>A professora orienta o aluno para a possibilidade de construir, no Geogebra, uma reta vertical referente a cada objeto, de modo a descobrir o ponto de interseção dessa reta com o gráfico em causa.
"Se considerares a reta $\mathrm{x} = -2$, e intersetares com o gráfico, será que não irás obter o que procuras?"</td></tr>
<tr><td></td><td>O aluno poderá adicionar a cada objeto três unidades e calcular $(x + 3)^2$.</td><td>A professora questiona o aluno sobre o zero que já tinha sido encontrado na alínea 2 a ii). "Será que o zero encontrado verificaria a expressão que consideraste?"</td></tr>
<tr><td></td><td>O aluno poderá aperceber-se da expressão que o Geogebra já fornece na parte da folha algébrica.</td><td>A professora pede ao aluno que tente encontrar de outra forma.</td></tr>
<tr><td></td><td>c)

i) A imagem de -4, por meio da função f é 16.

ii) O objeto -1 tem imagem 16.

iii) Para que o objeto -1 seja igual a -4, é necessário subtrair três unidades. $-1 - 3 = -4$

iv) Na função f a imagem de -3 é igual a 9.
Na nova função obtida, o objeto 0 tem imagem 9. Ou seja, $0 - 3 = -3$.</td><td></td></tr>
</table>

	O objeto -2, tem imagem 4 na função f. O objeto 1 tem imagem 4, por meio da nova função. Ou seja, $1-3=-2$. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir arranjar mais exemplos.	 A professora sugere que o aluno analise melhor a tabela construída.
	h) A cada abcissa do ponto do gráfico transformado é necessário subtrair três unidades para que as ordenadas dos pontos do gráfico de f se mantenham iguais, em ambos os gráficos. Assim, a expressão analítica correspondente ao gráfico transformado é $$f(x-3)=(x-3)^2$$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir determinar a expressão analítica pedida.	 A professora questiona o aluno sobre as conclusões retiradas nas alíneas anteriores. Ainda interpela o mesmo acerca dos valores que são alterados quando ocorre a transformação efetuada: “ Depois de teres efetuado a translação à função, que valores foram alterados?” A professora também poderá interpelar os aluno acerca do que representa o valor dos objetos numa função: “Numa função o que representa os valores do objeto? Então o que farás a x?”

- **Sistematização de ideias sobre a translação vertical e horizontal**

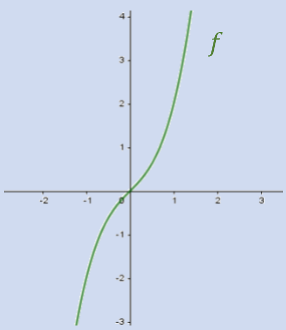
  Após ter sido feita a resolução e correção da ficha de trabalho, a professora irá fazer, juntamente com os alunos, uma sistematização do subtópico abordado nesta aula, a translação vertical e horizontal. Este momento terá como principal objetivo rever todos os tópicos que foram trabalhados pelos alunos durante a realização da ficha de trabalho.

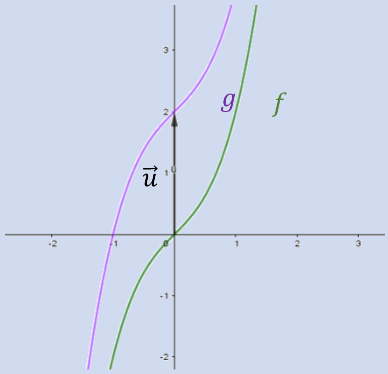
  Nesta fase da aula, a professora deverá interpelar os alunos acerca das conclusões que estes chegaram, concluindo as diferentes alterações que vão ocorrendo ao gráfico da função que é transformado. Neste caso, é importante realçar a translação horizontal que, provavelmente, levantará mais dificuldades aos alunos.

  A sistematização de ideias será apresentada pela professora recorrendo a um powerpoint. Este será entregue em formato de papel aos alunos no final da aula. Em seguida, apresentam-se as ideias que serão apresentadas no powerpoint.

Translação vertical

Exemplo 1: Consideremos a função $\boldsymbol{f(x) = x^3 + x}$





$$(\mathbf{0},\mathbf{2}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) + (\mathbf{2},\mathbf{0})$$

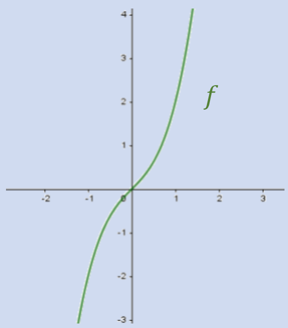
$$\in \boldsymbol{G_g} \qquad \in \boldsymbol{G_f} \qquad \boldsymbol{\vec{u}}$$

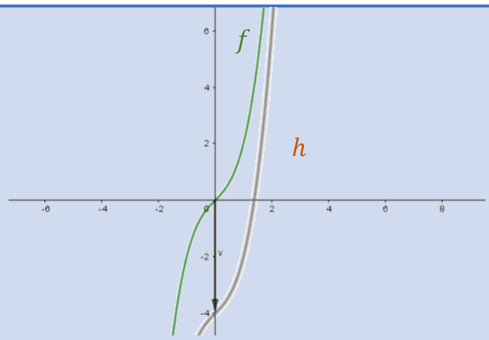
- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{D_g} = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{D'_f} = \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{D'_g} = \mathbb{R}$

O gráfico de $\boldsymbol{g}$ é imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ através da translação verical segundo o vetor $\boldsymbol{\vec{u}} = (\mathbf{0},\mathbf{2})$.

Ou seja, $\boldsymbol{g(x) = f(x) + 2}$.

Exemplo 2:





$$(\mathbf{0},-\mathbf{4}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) + (\mathbf{0},-\mathbf{4})$$

$$\in \boldsymbol{G_h} \qquad \in \boldsymbol{G_f} \qquad \vec{\boldsymbol{v}}$$

- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{D_h} = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{D'_f} = \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{D'_h} = \mathbb{R}$

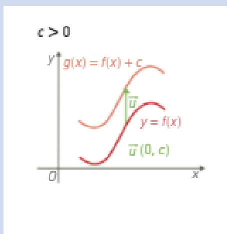
O gráfico de $\boldsymbol{h}$ é imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ através da translação vertical segundo o vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{0}, -\mathbf{3})$.

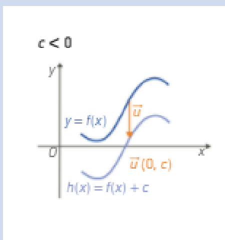
Ou seja,

$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{4}$

Definição:

Dada uma função real de variável real $\boldsymbol{f}$, um número real $\boldsymbol{c}$ e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico cartesiano da função $\boldsymbol{g}$ definida em $\boldsymbol{D_g} = \boldsymbol{D_f}$, por $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}$ é a imagem do gráfico cartesiano de $\boldsymbol{f}$ pela translação de vetor $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{0}, \boldsymbol{c})$.

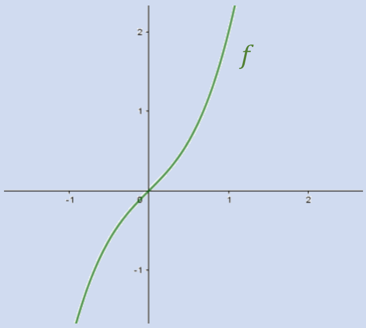


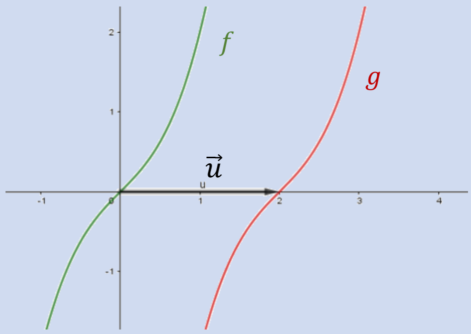


Máximo (2017)

Translação horizontal:

Exemplo 1: Consideremos a função $\boldsymbol{f(x) = x^3 + x}$.





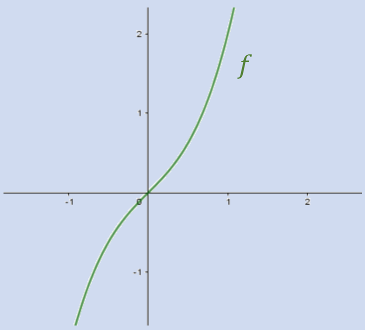
$$\begin{array}{ccccc} (\mathbf{2},\mathbf{0}) & = & (\mathbf{0},\mathbf{0}) & + & (\mathbf{2},\mathbf{0}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \in \boldsymbol{G_g} & & \in \boldsymbol{G_f} & & \boldsymbol{\vec{u}} \end{array}$$

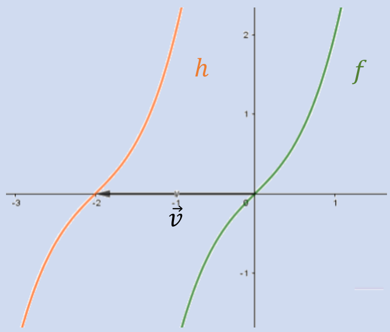
- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{D_g} = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{D'_f} = \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{D'_g} = \mathbb{R}$

O gráfico de $\boldsymbol{g}$ é imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ através da translação horizontal segundo o vetor $\boldsymbol{\vec{u}} = (\mathbf{2},\mathbf{0})$.
Ou seja,

$$\boldsymbol{g(x) = f(x - 2)}$$

Exemplo 2:





$$\underset{\in G_h}{\underset{\downarrow}{(-2,0)}} = \underset{\in G_f}{\underset{\downarrow}{(0,0)}} + \underset{\vec{v}}{\underset{\downarrow}{(-2,0)}}$$

- $D_f = \mathbb{R} \longrightarrow D_h = \mathbb{R}$
- $D'_f = \mathbb{R} \longrightarrow D'_h = \mathbb{R}$

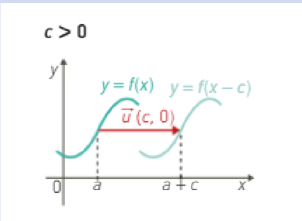
O gráfico de h é imagem de f através da translação horizontal segundo o vetor $\vec{v} = (-2,0)$.

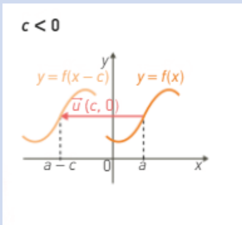
Ou seja,

$$h(x) = f(x+2)$$

Definição:

Dada uma função real de variável real f, um número c e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função g definida em $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$ *por* $g(x) = f(x - c)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c,0)$.





Máximo (2017)

Avaliação

A avaliação desta aula será do tipo reguladora, na medida em que se irá centrar no questionamento que será feito aos alunos ao longo da aula e no feedback oral e escrito fornecido pela professora. O feedaback oral acontecerá durante o trabalho autónomo realizado pelos alunos durante a realização das tarefas propostas, enquanto que o feedback escrito realizar-se-á nas fichas de trabalho que os alunos irão realizar ao longo da aula, e que irão entregar no final da aula.

Tanto o feedback oral e o feedback escrito também permitirá aos alunos tomarem consciência das suas dificuldades e refletirem acerca das suas aprendizagens. A análise feita às resoluções terá como objetivo obter elementos acerca das aprendizagens e dificuldades apresentadas pelos alunos, permitindo à professora refletir sobre os aspetos a ter em conta nas aulas seguintes.

Anexo 3.2. – Planificação da 2.ª aula

Plano de Aula

Instituto de Ciências Educativas Dia 24 de Abril de 2018 Aula de Matemática A - 10º CTA	Sumário: Resolução de exercícios sobre a translação vertical e horizontal Transformações geométricas de gráficos de funções: Contração e dilatação. Resolução de uma ficha de trabalho.

Tópicos

- Gráficos de funções obtidos por translação vertical
- Gráficos de funções obtidos por translação horizontal
- Gráficos de funções obtidos por contração e dilatação vertical
- Gráficos de funções obtidos por contração e dilatação horizontal

Principais Objetivos

- Representar, na calculadora gráfica, o gráfico de uma função;
- Identificar o domínio e o contradomínio e as coordenadas dos pontos extremos e zeros do gráfico de uma função e do seu gráfico transformado, por meio de uma translação;
- Aplicação de conhecimentos sobre a translação horizontal e vertical em exercícios com recurso à calculadora gráfica.
- Reconhecer os gráficos obtidos por contração e dilatação horizontal e vertical;
- Identificar a contração vertical de coeficiente $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{1}$, à transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano que associa o ponto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ao ponto $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P})$ com coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{ay})$;
- Identificar a dilatação vertical de coeficiente $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} > \boldsymbol{1}$ à transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano que associa o ponto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ao ponto $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P})$ com coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{ay})$;
- Reconhecer que o gráfico $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{af}(\boldsymbol{x})$, com $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{1}$ e $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$ é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela contração vertical;
- Reconhecer que o gráfico $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{af}(\boldsymbol{x})$, com $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{1}$ e $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$ é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela dilatação vertical;
- Identificar a contração horizontal de coeficiente $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{1}$, à transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano que associa o ponto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ao ponto $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P})$ com coordenadas $(\boldsymbol{ax}, \boldsymbol{y})$;
- Identificar a dilatação horizontal de coeficiente $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{1}$ à transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano que associa o ponto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ao ponto $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P})$ com coordenadas $(\boldsymbol{ax}, \boldsymbol{y})$
- Reconhecer que o gráfico $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{ax})$, com $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{1}$ e $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$ e é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela dilatação horizontal de coeficiente $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$;
- Reconhecer que o gráfico $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{ax})$, com $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{1}$ e $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$ é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela contração horizontal de coeficiente $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$;
- Reconhecer que o domínio de $\boldsymbol{g}$ é $\boldsymbol{D_g} = \left\{\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}\right\}$, sendo $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$.

Capacidades Transversais

- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática;
- Desenvolver a autonomia e o trabalho colaborativo;

- Desenvolver a capacidade argumentativa e o sentido critico.

Recursos

- Quadro
- Manual
- Software Geogebra
- Computador
- Ficha de trabalho nº 2 e nº 3
- Caderno
- Projetor
- Calculadora gráfica

Métodos de Trabalho a implementar na sala de aula

- Trabalho pares ou em grupo
- Grupo-Turma

Momentos da Aula

Momentos da Aula	Duração
• **Sumário**	5 minutos
• **Breve revisão**	5 minutos
• **Correção do trabalho de casa**	10 minutos
• **Ficha de trabalho nº 2**	
✓ Resolução e correção da ficha de trabalho nº2	15 minutos
• **Ficha de Trabalho nº 3**	
✓ Resolução da primeira questão da ficha de trabalho	10 minutos
✓ Correção e discussão de ideias relativas à primeira questão	10 minutos
✓ Resolução da segunda questão da ficha de trabalho	10 minutos
✓ Correção e discussão de ideias relativas à segunda questão	10 minutos
• **Sistematização de ideias relacionadas com a contração e dilatação vertical e horizontal**	15 minutos

Desenvolvimento da Aula

A presente aula será iniciada com uma revisão dos conteúdos trabalhados na aula anterior. Visto ter sido feito uma abordagem mais numérica e não ter existido tanto a relação entre a representação algébrica e gráfica, a professora procurará por breves momentos rever o powerpoint apresentado na aula anterior. Neste momento, a professora procurará salientar os termos "ordenadas" e "abcissas" que correspondem aos gráficos e os termos "objetos e "imagens" que dizem respeito à noção de função.

Após este momento inicial, a professora verificará quem realizou o trabalho de casa e averiguará quem teve dificuldades com o mesmo. Caso os alunos demonstrem muitas dificuldades a professora fará uma correção no quadro juntamente com os alunos, procurando confrontar as dificuldades que estes enfrentaram durante a realização do trabalho.

Para a realização das fichas de trabalho, a turma estará dividida em quatro grupos, sendo que a realização da primeira ficha será feita em grupo-turma, enquanto que a ficha número três será realizada em grupo e de forma autónoma.

A primeira ficha de trabalho tem como objetivo focar aspetos trabalhados na aula anterior e que agora serão trabalhados com uma função cúbica e recorrendo à calculadora gráfica. A segunda ficha trabalhada nesta aula irá focar-se na exploração de uma tarefa que envolve o subtópico das transformações relativas à contração e dilatação. Antes de iniciar este último momento, a professora recordará aos alunos sobre a necessidade de criarem a pasta no Ambiente de Trabalho, onde mais tarde guardarão o ficheiro de Geogebra que irão utilizar.

Os alunos serão também alertados, em ambos os momentos, para a resolução de todas as tarefas serem feitas numa folha à parte, sendo a correção feita no caderno diário.

A professora deverá remeter ainda para importância da justificação dos cálculos e do raciocínio dos alunos ao longo da realização da ficha de trabalho.

- **Correção do trabalho de casa**

	Atividade do aluno	Atividade da professora
47.	Proposta resolução: 47.1. $a)\ D'_g = [-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$ $b)\ D'_g = [-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}]$ $c)\ D'_g = [-3,2]$ 47.2. Se $h(x) = f(x) + k$, então $D'_h = [-\frac{5}{2} + k, \frac{5}{2} + k]$. Como $D'_h = [-\frac{17}{6}, \frac{13}{6}]$ Então $\begin{cases} -\frac{5}{2}k = -\frac{17}{6} \\ \frac{5}{2}k = \frac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$	A professora questionará os alunos acerca das suas dificuldades ao resolverem o trabalho de casa. Perante isso orientará o seu raciocínio, ajudando-os a entender o que era pedido.

- **Resolução da Ficha de Trabalho nº2**

A resolução da ficha de trabalho nº2 irá ser realizada em grupo-turma, sendo que a professora acompanhará todo o processo de resolução. A professora, durante a resolução, privilegiará o raciocínio dos alunos, insistindo sempre que estes justifiquem as suas respostas. Ao mesmo tempo insistirá na linguagem corrente, procurando que estes justifiquem corretamente a relação entre a componente gráfica e algébrica, assim como todas as repostas dadas pelos mesmos.

Esta ficha proporcionará ainda aos alunos a oportunidade de trabalharem com a calculadora gráfica, adquirida por estes no início do ano. Assim sendo, a professora orientará os alunos na utilização deste meio didático.

	Atividade do aluno	Atividade da professora
1.	**Proposta resolução:** $b)$ A função g tem dois zeros. Coordenadas dos pontos do gráfico correspondentes aos zeros de f: $(-1{,}73; 0)$ $(0{,}0)$ $(1{,}73; 0)$ $c)$ Coordenadas dos pontos do gráfico de f correspondentes aos extremos de g: Ponto do gráfico de f correspondente ao máximo relativo: $(-1{,}2)$ Ponto do gráfico de f correspondente ao mínimo relativo: $(1, -2)$ $d)$ $h(x) = g(x+5) = (x+5)^3 - 3(x+5)$ $i.$ Sim, apenas no domínio $D_h = [-7, -3]$ $D_h = [-15{,}15]$ $ii.$ Coordenadas dos pontos do gráfico de h correspondente aos zeros: $(-6{,}73; 0)$ $(-5{,}0)$ e $(-3{,}26; 0)$ Coordenadas dos pontos do gráfico de h correspondentes aos extremos de g: : Ponto do gráfico de h correspondente ao mínimo relativo: $(-4, -2)$ Ponto do gráfico de h correspondente ao máximo relativo: $(-6{,}2)$ $iii.$	A professora resolverá esta ficha juntamente com os alunos, recorrendo ao questionamento e esclarecendo dúvidas que vão surgindo. Como a calculadora gráfica irá ser necessária nesta altura, a professora trabalhará com esta ferramenta ao mesmo tempo que os alunos.

É possível verificar que as ancissas dos pontos correspondentes aos zeros e aos extremos do gráfico transformado alteram-se relativamente ao gráfico de f.
As abcissas destes pontos, no gráfico de h resultam da adição de mais 5 unidades às abcissas dos pontos do gráfico de f.

$e)\ j(x) = x^3 - 3x - 2$

$i.$ O domínio não sofre alterações, apenas o contradomínio se irá alterar.

$$D_j = [-4,4]$$

$$D'_j = [-17,13]$$

$ii.$ Coordenadas dos pontos do gráfico de j correspondentes aos zeros:

$$(-1,0)\ (2,0)$$

Coordenadas dos pontos do gráfico de h correspondentes aos extremos de j:

Coordenadas do ponto do gráfico de j correspondente ao mínimo relativo: $(1,-4)$

Coordenadas do ponto do gráfico de j correspondente ao máximo relativo: $(-1,0)$

$iii.$ É possível verificar uma alteração na quantidade de zeros. Inicialmente a função f tinha três zeros, mas ao deslocar o seu gráfico duas unidades para baixo, o máximo relativo de f passou a ser um zero da função j.
O valor das ordenadas dos pontos relativos aos zeros e aos extremos na função j resultam da subtração de duas unidades às ordenadas dos pontos do gráfico de f. Tal acontece porque o gráfico de j resulta do gráfico de f deslocando este duas unidades para baixo, segundo o vetor $(0,-2)$.

- **Resolução da ficha de trabalho nº 3**

  Enquanto os alunos resolvem a ficha de trabalho, a professora circulará pela sala para apoiar os alunos durante a realização da ficha e para esclarecer eventuais dúvidas que os alunos tenham, orientando os mesmos para o que é pedido em cada questão. Ao mesmo tempo será feita uma análise ao trabalho que cada grupo vai desenvolvendo, com o objetivo de ir tomando consciência do trabalho que os alunos vão desenvolvendo. Esta análise terá também como objetivo selecionar as principais ideias que possam, mais tarde, ser discutidas com a turma.

- **Discussão e correção da Ficha de Trabalho n.º 3**

  A correção da ficha será feita em três momentos, sendo que cada questão será discutida e resolvida logo a seguir a os alunos terminarem a sua resolução. A correção será feita por um dos elementos do grupo que foi selecionado para apresentar a sua resposta. À medida que o aluno resolve no quadro, a professora vai interpelando-o acerca da forma como chegou às suas conclusões, questionando também os restantes alunos.

	Atividade da professora	Atividade do aluno
1.	**Proposta de resolução:** $a)\ D_f = \mathbb{R}$ $D'_{f=}[-1;+\infty[$ $b)$ zeros: $\{-2,0\}$ Extremos: mínimo absoluto: {-1} $c)$ $i.\ D_g = \mathbb{R}$ $D'_g = [-2;+\infty[$ Zeros: $\{-2,0\}$ Extremos: mínimo absoluto: $\{-2\}$ $ii.\ D_h = \mathbb{R}$ $D'_h = [-\frac{1}{8};+\infty[$ Zeros: $\{-2,0\}$	

	Extremos: mínimo absoluto: $\{-\frac{1}{8}\}$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não se recordar de como encontrar o valor dos zeros e dos extremos no Geogebra. $d)$ Observando a representação gráfica de g e comparando com a representação gráfica de f, é possível concluir que ocorreu uma mudança nas ordenadas dos pontos do gráfico de f, ou seja nas imagens da função f. Assim sendo, o contradomínio da função g altera-se em relação à função f. e/ou A parábola tornou-se mais alongada verticalmente. e/ou Ocorreu uma dilatação relativamente ao eixo das ordenadas. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir explicar o que é pedido. $e)$ Em relação à representação gráfica de h é possível constatar que ocorreu uma mudança nas ordenadas dos pontos do gráfico de f, alterando as imagens de f. Assim sendo, o contradomínio da função h altera-se em relação à função f.	A professora relembra que a informação relativa a este aspeto encontra-se no guião dado na primeira aula. Ou a professora poderá indicar quais os comandos que o aluno poderá utilizar. A professora questiona o aluno sobre as alterações que ocorreram relativamente aos pontos dos diferentes gráficos "Será que as abcissas foram alterados? E as ordenadas?"

e/ou

A parábola ficou mais curta verticalmente.

e/ou

Ocorreu uma contração em relação ao eixo das ordenadas.

<u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá não conseguir explicar o que é pedido.

A professora questiona o aluno sobre as alterações que ocorreram relativamente aos pontos dos diferentes gráficos "Será que as abcissas foram alterados? E as ordenadas?"

$f)$

	f	g	h
Coordenadas dos pontos do gráfico relativos aos zeros	$(-2,0)$ $(0,0)$	$(-2,0)$ $(0,0)$	$(-2,0)$ $(0,0)$
Coordenadas dos pontos do gráfico relativos aos extremos	$(-1,-1)$	$(-1,-2)$	$\left(-1,-\frac{1}{8}\right)$

<u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá não entender como se deve construir a tabela.

A professora exemplifica no quadro.

O aluno poderá indicar apenas os valores dos extremos e dos zeros, não indicando as coordenadas.

A professora relembra o aluno que é necessário indicar as coordenadas.

$i.$ Ao observar os zeros de f e g, é possível verificar que os zeros não se alteram. Como ocorrem apenas transformações a nível vertical, então os zeros mantêm-se iguais.
Quanto aos extremos é possível observar que as ordenadas dos pontos se alteram, mantendo-

	se as abcissas. O mínimo absoluto de g é -2, enquanto que na função f é -1. O mínimo de g pode ser obtido através do mínimo f, multiplicando este pelo valor 2. Relativamente à função h, e comparando com f, verifica-se que os zeros não se alteram também, visto a mudança ocorrer apenas a no eixo das ordenadas. Quanto aos extremos, estes também se alteram. O mínimo absoluto é $-\frac{1}{8}$, enquanto que em f é -1. O mínimo de h pode ser obtido através do mínimo de f, multiplicando este pela constante $\frac{1}{8}$. <u>Possíveis dificuldades:</u>		
	O aluno poderá não identificar todas as alterações.	A professora chama a atenção para mais alterações que ocorrem, além das que o aluno já identificou.	
	O aluno poderá não conseguir estabelecer relação entre os valores que diferem.	A professora questiona sobre a existência de uma relação entre os números que diferem com a constante que está a multiplicar em cada uma das expressões de g e h.	
	$ii.\ g(x) = 2f(x) = 2(x^2 + 2x) = 2x^2 + 4x$ Cada ordenada dos pontos do gráfico de f são multiplicados pelo coeficiente 2. Assim sendo, as imagens de g correspondem às imagens de f multiplicadas a duas unidades. Por exemplo, o ponto $(-1,-1)$ irá transformar-se no ponto $(-1,-2)$ na função g, pois a imagem $-1 \in f$ multiplicada a 2, será igual a -2. $h(x) = \frac{1}{8}f(x) = \frac{1}{8}(x^2 + 2x) = \frac{x^2}{8} + \frac{2}{8}x$ Cada ordenada dos pontos do gráfico de f são multiplicados pelo coeficiente $\frac{1}{8}$.		

2.	Assim sendo, as imagens de g correspondem às imagens de f multiplicadas a $\frac{1}{8}$. Por exemplo, o ponto $(-1,-1)$ irá transformar-se no ponto $(-1,-\frac{1}{8})$ na função h, pois a imagem $-1 \in f$ multiplicada a $\frac{1}{8}$, será igual a $-\frac{1}{8}$. <u>Possíveis dificuldades:</u> Os alunos poderão não conseguir justificar.	A professora remete o aluno para as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, questionando: "O que foi acontecendo aos pontos do gráfico de f? O que permitia transformar uma imagem de f numa imagem de g ou h?"
	$a)$ $i.$ $D_i = \mathbb{R}$ $D'_i = [-1; +\infty[$ Zeros: $\{-\frac{1}{2}, 0\}$ Extremos: mínimo absoluto: $\{-1\}$ $ii.$ $D_j = \mathbb{R}$ $D'_j = [-1; +\infty[$ Zeros: $\{-4,0\}$ Extremos: mínimo absoluto: $\{-1\}$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não se recordar de como encontrar o valor dos zeros e dos extremos no Geogebra.	A professora relembra que a informação relativa a este aspeto encontra-se no guião dado na primeira aula. Ou a professora poderá indicar quais os comandos que o aluno poderá utilizar.
	$b)$ Em relação à representação gráfica de i é possível constatar que ocorreu uma mudança	

no eixo das abcissas, alterando as abcissas do gráfico de f.

e/ou

A parábola ficou mais estreita.

e/ou

Ocorreu uma contração em relação ao eixo das abcissas.

Ocorreu uma contração em relação ao eixo das abcissas.

Possíveis dificuldades:

O aluno poderá não conseguir explicar o que é pedido.

A professora questiona o aluno sobre as alterações que ocorreram, relativamente às abcissas e às ordenadas dos pontos do gráfico de f. “Será que ocorreu alteração no valor das abcissas dos pontos do gráfico? E no valor das ordenadas?”

$c)$

	f	i	j
Coordenadas dos pontos do gráfico relativos aos zeros	$(-2,0)$ $(0,0)$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$ $(0,0)$	$(-4,0)$ $(0,0)$
Coordenadas dos pontos do gráfico relativos aos extremos	$(-1,-1)$	$(-\frac{1}{4},-1)$	$(-2,-1)$

Possíveis dificuldades:

O aluno poderá não entender como se deve construir a tabela.

A professora exemplifica no quadro.

A professora relembra o aluno que é necessário indicar as coordenadas.

	O aluno poderá indicar apenas os valores dos extremos e dos zeros, não indicando as coordenadas. i. Ao observar os zeros de f e i, é possível verificar que os zeros se alteram. Como ocorrem apenas transformações a nível do eixo das abcissas, os zeros irão sofrer alterações, relativamente aos zeros de f. Quanto aos extremos é possível observar que estes não se alteram, visto que os extremos estão diretamente relacionados com a ordenada do ponto correspondente ao extremo. O mínimo absoluto de i é -1, enquanto que na função f é também -1. O extremante será modificado: na função i corresponde a $-\frac{1}{4}$ e na função f é o -1. O extremante de f poderá ser multiplicado por $\frac{1}{4}$, de modo a obter o extremante de i. Ao observar os zeros de f e j, é possível verificar que os zeros se alteram. Como ocorrem apenas transformações ao nível do eixo das abcissas, os zeros irão sofrer alterações. Quanto aos extremos é possível observar que estes não se alteram, visto que os extremos estão diretamente relacionados com a ordenada do ponto correspondente ao extremo. O mínimo absoluto de i é -1, enquanto que na função f é também -1. O extremante será modificado: na função j corresponde a -2 e na função f é o -1. O extremante de j é obtido através do extremante de f multiplicado ao coeficiente 2. <u>Possíveis dificuldades:</u>	
	O aluno poderá não identificar todas as alterações.	A professora chama a atenção para mais alterações que ocorrem, além das que o aluno já identificou.
	O aluno poderá não conseguir estabelecer relação entre os valores que diferem.	A professora questiona sobre a existência de uma relação entre os números que diferem com a constante que está a

	$ii.\ i(x) = f(4x) = (4x)^2 + 2(4x) = 16x^2 + 8x$ Para que não haja alteração no valor das imagens, em ambas as funções, todas as abcissas pertencentes aos pontos do gráfico de f serão multiplicadas pelo inverso da constante que é multiplicada pelos objetos na expressão analítica da função i. Por exemplo, o ponto $(-1,-1)$ irá transformar-se no ponto $(-\frac{1}{4},-1)$ na função i, pois o objeto $-1\ \in f$ multiplicada a $\frac{1}{4}$, será igual a $-\frac{1}{4}$. Logo $f\left(4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = f(-1)$. $j(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)x = \frac{x^2}{4} + x$ Para que não haja alteração no valor das imagens, em ambas as funções, todas as abcissas pertencentes aos pontos do gráfico de f serão multiplicadas pelo inverso da constante que é multiplicada pelos objetos na expressão analítica da função j. Por exemplo, o ponto $(-1,-1)$ irá transformar-se no ponto $(-2,-1)$ na função i, pois o objeto $-1\ \in f$ multiplicada a 2, será igual a -2. Logo $f\left(\frac{1}{2}\times(-2)\right) = f(-1)$. <u>Possíveis dificuldades:</u> Os alunos poderão não conseguir justificar.	multiplicar em cada uma das expressões de g e h. Durante a discussão a professora terá especial atenção a esta questão, ajudando os alunos a refletir que no caso de contrações e dilatações horizontais, o domínio da função será alterado. A professora remete o aluno para as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, questionando: "O que foi acontecendo às imagens? O que permitia transformar uma imagem de f numa imagem de g ou h?" A professora poderá exemplicar com um caso particular.

Ao longo da discussão da tarefa realizada aos alunos a professora procurará focar-se em aspetos importantes de modo a que todos os alunos percebam o essencial relativamente à contração e dilatação. Desta forma, a professora terá de realçar o que vai acontecendo aos valores da função $\boldsymbol{f}$ depois de esta ser transformada, e que os valores se alteram segundo um coeficiente que multiplica as abcissas e as ordenadas dos pontos do gráfico da função. É ainda fundamental alertar o aluno para as representações gráficas e para a relação que estas têm com os coeficientes que transformam o gráfico de uma determinada função noutro.

- **Sistematização de ideias**

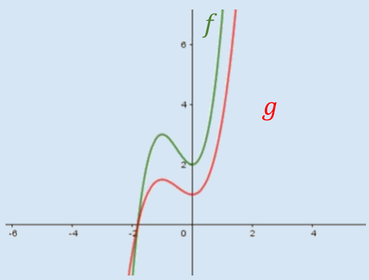
Após ter sido feita a resolução e correção da ficha de trabalho, a professora irá fazer, juntamente com os alunos, uma sistematização do subtópico abordado na aula, a contração e dilatação vertical e horizontal. Este momento da aula terá como principal objetivo rever todos os tópicos que foram trabalhados pelos alunos ao longo da mesma.

Nesta fase da aula, a professora deverá interpelar os alunos acerca das conclusões que estes chegaram durante a realização da ficha de trabalho, permitindo ao aluno sistematizar as principais ideias a que chegou.

Durante a sistematização de ideias será apresentada pela professora os seguintes materiais, em formato powerpoint.

Contração e dilatação vertical

Exemplo 1: Consideremos a função $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2}$ e a função $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}\, f(x)}$.



- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$ $\qquad$ $\boldsymbol{D_g} = \mathbb{R}$
- Pontos do gráfico de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ relativos aos zeros

$(-\mathbf{1,81;0}) \in \boldsymbol{G_f}$ $\quad$ $(-\mathbf{1,81;0}) \in \boldsymbol{G_g}$

- Extremos:

$\mathbf{3} \in \boldsymbol{D'_f}$ $\quad$ $(-\mathbf{1,3}) \in \boldsymbol{G_f}$

$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \in \boldsymbol{D'_g}$ $\quad$ $\left(-\mathbf{1}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right) \in \boldsymbol{G_g}$

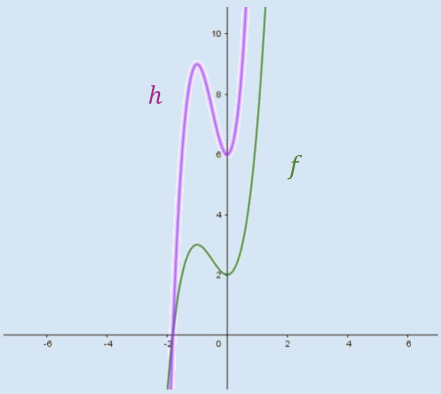
$\mathbf{2} \in \boldsymbol{D'_f}$ $\quad$ $(\mathbf{0,2}) \in \boldsymbol{G_f}$

$\mathbf{1} \in \boldsymbol{D'_g}$ $\quad$ $(\mathbf{0,1}) \in \boldsymbol{G_g}$

- A ordenada 3 é multiplicada pelo coeficiente $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.
- A ordenada 2 é multiplicada pelo coeficiente $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

Os pontos $\left(-\mathbf{1}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$ e $(\mathbf{0,1})$ são imagens dos pontos $(-\mathbf{1,3})$ e $(\mathbf{0,2})$, respetivamente, pela contração vertical de coeficiente $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ e pertencem ao gráfico de $\boldsymbol{g}$.

Exemplo 2: Seja $\boldsymbol{h(x) = 3f(x)}$.



- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$ $\quad$ $\boldsymbol{D_h} = \mathbb{R}$
- Pontos do gráfico de $\boldsymbol{f}$ relativos aos zeros:

$(-\mathbf{1,81;0}) \in \boldsymbol{G_f}$ $\quad$ $(-\mathbf{1,81;0}) \in \boldsymbol{G_h}$

- Extremos:

$-\mathbf{3} \in \boldsymbol{D'_f}$ $\quad$ $(-\mathbf{1,3}) \in \boldsymbol{G_f}$

$\mathbf{9} \in \boldsymbol{D'_h}$ $\quad$ $(-\mathbf{1,9}) \in \boldsymbol{G_h}$

$\mathbf{2} \in \boldsymbol{D'_f}$ $(\mathbf{0}, \mathbf{2}) \in \boldsymbol{G_f}$

$\mathbf{6} \in \boldsymbol{D'_h}$ $(\mathbf{0}, \mathbf{6}) \in \boldsymbol{G_h}$

- A ordenada 3 é multiplicada pelo coeficiente $\mathbf{3}$.
- A ordenada 2 é multiplicada pelo coeficiente $\mathbf{3}$.

Os pontos $(-\mathbf{1}, \mathbf{9})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{6})$ são imagens dos pontos $(-\mathbf{1}, \mathbf{3})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$, respetivamente, pela dilatação vertical de coeficiente $\mathbf{3}$ e pertencem ao gráfico de $\boldsymbol{h}$.

Nota:
A cada ponto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pertencente a um plano munido de um referencial cartesiano, a transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano associa o ponto $\boldsymbol{P}$ ao ponto $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{ay})$ designa-se por contração vertical $(\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1})$ ou dilatação vertical $(\boldsymbol{a} > \mathbf{1})$ $(\mathbf{Máximo}, \mathbf{2017})$.

Definição:

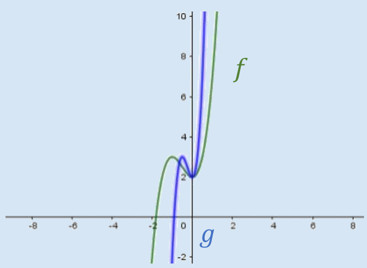
Considerando um plano munido de um referencial cartesiano e uma função real de variável real $\boldsymbol{f}$ diz-se que o gráfico da função $\boldsymbol{g}$ definida em $\boldsymbol{D_g} = \boldsymbol{D_f}$ por $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{af}(\boldsymbol{x})$ é imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$:

- Por uma contração vertical de coeficiente $\boldsymbol{a}$ se $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$;
- Por uma dilatação vertical de coeficiente $\boldsymbol{a}$ se $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$.

Máximo (2017)

Contração e dilatação horizontal

Exemplo 1: Consideremos a função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{2}\boldsymbol{x})$



- $\boldsymbol{D_f} = [-\mathbf{2}, \mathbf{2}]$ $\boldsymbol{D_g} = [-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$
- Pontos do gráfico de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ relativos aos zeros:

$(-\mathbf{1{,}81}; \mathbf{0}) \in \boldsymbol{G_f}$ $(-\mathbf{0{,}9}; \mathbf{0}) \in \boldsymbol{G_g}$

$(-1,81 \times \frac{1}{2} = -0,9)$

- **Extremos:**

$3 \in D'_f \qquad (-1,3) \in G_f$

$3 \in D'_g \qquad \left(-\frac{1}{2},3\right) \in G_g$

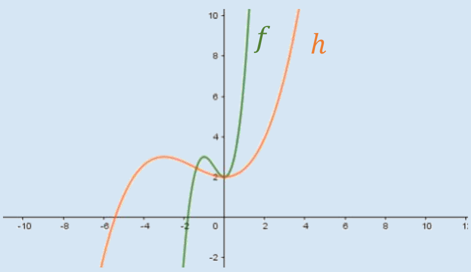
$2 \in D'_f \qquad (0,2) \in G_f$

$2 \in D'_g \qquad (0,2) \in G_g$

- A abcissa -1 é multiplicado pelo coeficiente $\frac{1}{2}$, inverso de 2.
- A abcissa 0 é multiplicado pelo coeficiente $\frac{1}{2}$, inverso de 2.

Os pontos $(-\frac{1}{2},3)$ e $(0,2)$ são imagens dos pontos $(-1,3)$ e $(0,2)$, respetivamente, pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ e pertencem ao gráfico de g.

Exemplo 2: Consideremos a função $h(x) = f(\frac{1}{3}x)$



- $D_f = [-2,2] \qquad D_h = [-6,6]$
- **Pontos do gráfico de f e h relativos aos zeros:**

$(-1,81;0) \in G_f \qquad (-5,42;0) \in G_h$

$(-1,81 \times 3 = -5,42)$

- **Extremos:**

$3 \in D'_f \qquad (-1,3) \in G_f$

$3 \in D'_h \qquad (-3,3) \in G_h$

$2 \in D'_f \qquad (0, 2) \in G_f$

$2 \in D'_h \qquad (0, 2) \in G_h$

- A abcissa -1 é multiplicado pelo coeficiente **3**, inverso de $\frac{1}{3}$.
- A abcissa 0 é multiplicado pelo coeficiente **3**, inverso de $\frac{1}{3}$.

Os pontos $(-3, 3)$ e $(0, 2)$ são imagens dos pontos $(-1, 3)$ e $(0, 2)$, respetivamente, pela dilatação horizontal de coeficiente **3** e pertencem ao gráfico de g.

Nota:
A cada ponto $P(x, y)$ pertencente a um plano munido de um referencial cartesiano, a transformação ϕ do plano associa o ponto P ao ponto $\phi(P) = P'(ax, y)$ designa-se por contração horizontal de coeficiente a $(0 < a < 1)$ ou dilatação horizontal de coeficiente a $(a > 1)$ (Máximo,2017)

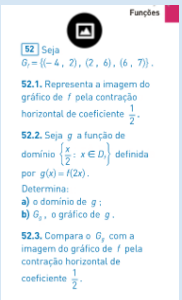
Definição:

Considerando um plano munido de um referencial cartesiano e uma função real de variável real f diz-se que o gráfico da função g definida em $D_g = \{\frac{x}{a} : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(ax)$ é imagem do gráfico de f:

- Por uma **dilatação horizontal de coeficiente** $\frac{1}{a}$ se $0 < a < 1$;
- Por uma **contração horizontal de coeficiente** $\frac{1}{a}$ se $a > 1$.

Máximo (2017)

TPC: Manual página 51 exercício 52.


Funções

52 Seja
$G_f = \{(-4, 2), (2, 6), (6, 7)\}$.

52.1. Representa a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.

52.2. Seja g a função de domínio $\left\{\frac{x}{2} : x \in D_f\right\}$ definida por $g(x) = f(2x)$.
Determina:
a) o domínio de g;
b) G_g, o gráfico de g.

52.3. Compara o G_g com a imagem do gráfico de f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$.

Avaliação

A avaliação desta aula será do tipo reguladora, na medida em que se irá centrar no questionamento que será feito aos alunos ao longo da aula e no feedback oral e escrito fornecido pela professora. O feedaback oral acontecerá durante o trabalho autónomo realizado pelos alunos durante a realização das tarefas propostas, enquanto que o feedback escrito realizar-se-á nas fichas de trabalho que os alunos irão realizar ao longo da aula, e que irão entregar no final da aula.

Tanto o feedback oral e o feedback escrito também permitirá aos alunos tomarem consciência das suas dificuldades e refletirem acerca das suas aprendizagens. A análise feita às resoluções terá como objetivo obter elementos acerca das aprendizagens e dificuldades apresentadas pelos alunos, permitindo à professora refletir sobre os aspetos a ter em conta nas aulas seguintes.

Anexo 3.3. – Planificação da 3.ª aula

Plano de Aula

Instituto de Ciências Educativas Dia 26 de Abril de 2018 Aula de Matemática A - 10º CTA	Sumário: Continuação da aula anterior Resolução de uma ficha de trabalho.

Tópicos

- Gráficos de funções obtidos por contração e dilatação vertical
- Gráficos de funções obtidos por contração e dilatação horizontal

Principais Objetivos

- Representar, na calculadora gráfica, o gráfico de uma função;
- Reconhecer os gráficos obtidos por contração e dilatação horizontal e vertical;
- Identificar a contração vertical de coeficiente $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0 < a < 1}$, à transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano que associa o ponto $\boldsymbol{P(x, y)}$ ao ponto $\boldsymbol{\phi(P)}$ com coordenadas $\boldsymbol{(x, ay)}$;
- Identificar a dilatação vertical de coeficiente $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a > 1}$ à transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano que associa o ponto $\boldsymbol{P(x, y)}$ ao ponto $\boldsymbol{\phi(P)}$ com coordenadas $\boldsymbol{(x, ay)}$;
- Reconhecer que o gráfico $\boldsymbol{g = af(x)}$, com $\boldsymbol{0 < a < 1}$ e $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$ é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela contração vertical;
- Reconhecer que o gráfico $\boldsymbol{g = af(x)}$, com $\boldsymbol{a > 1}$ e $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$ é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela dilatação vertical;
- Identificar a contração horizontal de coeficiente $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0 < a < 1}$, à transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano que associa o ponto $\boldsymbol{P(x, y)}$ ao ponto $\boldsymbol{\phi(P)}$ com coordenadas $\boldsymbol{(ax, y)}$;
- Identificar a dilatação horizontal de coeficiente $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a > 1}$ à transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano que associa o ponto $\boldsymbol{P(x, y)}$ ao ponto $\boldsymbol{\phi(P)}$ com coordenadas $\boldsymbol{(ax, y)}$
- Reconhecer que o gráfico $\boldsymbol{g = f(ax)}$, com $\boldsymbol{0 < a < 1}$ e $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$ e é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela dilatação horizontal de coeficiente $\boldsymbol{\frac{1}{a}}$;
- Reconhecer que o gráfico $\boldsymbol{g = f(ax)}$, com $\boldsymbol{a > 1}$ e $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$ é a imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela contração horizontal de coeficiente $\boldsymbol{\frac{1}{a}}$;
- Reconhecer que o domínio de $\boldsymbol{g}$ é $\boldsymbol{D_g = \left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}}$, sendo $\boldsymbol{f}$ função $\boldsymbol{r.v.r}$.
- Aplicação de conhecimentos sobre a contração e dilatação vertical e horizontal em exercícios com a calculadora gráfica.

Capacidades Transversais

- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática;
- Desenvolver a autonomia e o trabalho colaborativo;
- Desenvolver a capacidade argumentativa e o sentido critico.

Recursos

- Quadro
- Manual
- Software Geogebra
- Computador
- Ficha de trabalho nº 3 e nº 4
- Caderno
- Projetor
- Calculadora gráfica

Métodos de Trabalho a implementar na sala de aula

- Trabalho pares ou em grupo
- Grupo-Turma

Momentos da Aula — Duração

- **Sumário** — 10 minutos
- **Ficha de trabalho nº 3**
  - ✓ Continuação da correção da ficha de trabalho nº2 — 10 minutos
- **Ficha de trabalho n.º 3**
  - ✓ Resolução da questão 2 da ficha de trabalho — 25 minutos
  - ✓ Discussão e correção da questão 2 da ficha de trabalho — 10 minutos
- **Ficha de Trabalho nº 4**
  - ✓ Resolução da ficha de trabalho — 10 minutos
  - ✓ Correção e discussão de ideias sobre ficha de trabalho — 10 minutos
- **Sistematização de ideias relacionadas com a contração e dilatação vertical e horizontal** — 15 minutos

Desenvolvimento da Aula

Antes da professora iniciar a aula, esta irá proceder à recolha do trabalho de casa que foi proposto aos alunos, na aula passada. Esta recolha tem como principal objetivo analisar e retirar informação acerca do trabalho que os alunos desenvolvem em sala de aula, permitindo à professora tomar consciência das aprendizagens e dificuldades que os mesmos vão revelando. Assim sendo, logo no inicio desta aula a professora entregará as resoluções dos alunos com o feedback escrito pela professora. Neste seguimento, será então feita umas observações pela professora sobre as dificuldades gerais que esta identificou ao analisar as resoluções. Ao mesmo tempo, será tido em conta aspetos que nas aulas anteriores não ficaram tão bem esclarecidos.

Logo de seguida, será feita uma continuidade da aula anterior, visto não ter sido possível terminar tudo o que estava previsto. Algumas questões relativas à contração e dilatação vertical ficaram por corrigir e as questões relativas à contração e dilatação horizontal não foram trabalhadas ainda. Desta forma, a professora dará um tempo para os alunos acabarem a primeira questão, seguindo-se a correção da mesma.

Assim que a primeira questão for discutida e corrigida, os alunos irão resolver a segunda questão da ficha de trabalho, relativa à contração e dilatação horizontal.

Para a realização das fichas de trabalho, a turma estará dividida em quatro grupos, sendo que a realização de ambas as fichas será em grupo e de forma autónoma. A professora procurará insistir na importância da justificação dos cálculos e do raciocínio dos alunos ao longo da realização da ficha de trabalho.

A professora recordará aos alunos sobre a necessidade de criarem a pasta no Ambiente de Trabalho, onde mais tarde guardarão o ficheiro de Geogebra que irão utilizar.

Além disso, os alunos serão também alertados, em ambos os momentos, para a resolução de todas as tarefas serem feitas numa folha à parte, sendo a correção feita no caderno diário.

- **Continuação da resolução da ficha de trabalho nº 3**

Enquanto os alunos resolvem a ficha de trabalho, a professora circulará pela sala para apoiar os alunos durante a realização da ficha e para esclarecer eventuais dúvidas que os alunos tenham, orientando os mesmos para o que é pedido em cada questão. Ao mesmo tempo será feita uma análise ao trabalho que cada grupo vai desenvolvendo, com o objetivo de ir tomando consciência das dificuldades e aprendizagens que os alunos vão demonstrando. Esta análise terá também como objetivo selecionar uma resolução que possa ser, mais tarde, discutida durante a correção da ficha.

.

	Atividade da professora	Atividade do aluno
1.	**Proposta de resolução:** $a)\ D_f = \mathbb{R}$ $D'_{f=}[-1;+\infty[$ $b)$ zeros: $\{-2,0\}$ Extremos: mínimo absoluto: {-1} $c)$ $i.\ D_g = \mathbb{R}$ $D'_g = [-2;+\infty[$ Zeros: $\{-2,0\}$ Extremos: mínimo absoluto: $\{-2\}$ $ii.\ D_h = \mathbb{R}$	

	$D'_h = [-\frac{1}{8}; +\infty[$ Zeros: $\{-2{,}0\}$ Extremos: mínimo absoluto: $\{-\frac{1}{8}\}$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não se recordar de como encontrar o valor dos zeros e dos extremos no Geogebra.	A professora relembra que a informação relativa a este aspeto encontra-se no guião dado na primeira aula. Ou a professora poderá indicar quais os comandos que o aluno poderá utilizar.
	$d)$ Observando a representação gráfica de g e comparando com a representação gráfica de f, é possível concluir que ocorreu uma mudança nas ordenadas dos pontos do gráfico de f, ou seja nas imagens da função f. Assim sendo, o contradomínio da função g altera-se em relação à função f. e/ou A parábola tornou-se mais alongada verticalmente. e/ou Ocorreu uma dilatação relativamente ao eixo das ordenadas. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir explicar o que é pedido.	A professora questiona o aluno sobre as alterações que ocorreram relativamente aos pontos dos diferentes gráficos "Será que as abcissas foram alterados? E as ordenadas?"

$e)$ Em relação à representação gráfica de h é possível constatar que ocorreu uma mudança nas ordenadas dos pontos do gráfico de f, alterando as imagens de f.
Assim sendo, o contradomínio da função h altera-se em relação à função f.

e/ou

A parábola ficou mais curta verticalmente.

e/ou

Ocorreu uma contração em relação ao eixo das ordenadas.

<u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá não conseguir explicar o que é pedido.

A professora questiona o aluno sobre as alterações que ocorreram relativamente aos pontos dos diferentes gráficos "Será que as abcissas foram alterados? E as ordenadas?"

$f)$

	f	g	h
Coordenadas dos pontos do gráfico relativos aos zeros	$(-2,0)$ $(0,0)$	$(-2,0)$ $(0,0)$	$(-2,0)$ $(0,0)$
Coordenadas dos pontos do gráfico relativos aos extremos	$(-1,-1)$	$(-1,-2)$	$\left(-1,-\frac{1}{8}\right)$

<u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá não entender como se deve construir a tabela.

A professora exemplifica no quadro.

O aluno poderá indicar apenas os valores dos extremos e dos zeros, não indicando as coordenadas.

A professora relembra o aluno que é necessário indicar as coordenadas.

	i. Ao observar os zeros de f e g, é possível verificar que os zeros não se alteram. Como ocorrem apenas transformações a nível vertical, então os zeros mantêm-se iguais. Quanto aos extremos é possível observar que as ordenadas dos pontos se alteram, mantendo-se as abcissas. O mínimo absoluto de g é -2, enquanto que na função f é -1. O mínimo de g pode ser obtido através do mínimo f, multiplicando este pelo valor 2. Relativamente à função h, e comparando com f, verifica-se que os zeros não se alteram também, visto a mudança ocorrer apenas a no eixo das ordenadas. Quanto aos extremos, estes também se alteram. O mínimo absoluto é $-\frac{1}{8}$, enquanto que em f é -1. O mínimo de h pode ser obtido através do mínimo de f, multiplicando este pela constante $\frac{1}{8}$. Possíveis dificuldades:	
	O aluno poderá não identificar todas as alterações.	A professora chama a atenção para mais alterações que ocorrem, além das que o aluno já identificou.
	O aluno poderá não conseguir estabelecer relação entre os valores que diferem.	A professora questiona sobre a existência de uma relação entre os números que diferem com a constante que está a multiplicar em cada uma das expressões de g e h.
	$ii.$ $g(x) = 2f(x) = 2(x^2 + 2x) = 2x^2 + 4x$ Cada ordenada dos pontos do gráfico de f são multiplicados pelo coeficiente 2. Assim sendo, as imagens de g correspondem às imagens de f multiplicadas a duas unidades. Por exemplo, o ponto $(-1, -1)$ irá transformar-se no ponto $(-1, -2)$ na função g, pois a imagem $-1 \in f$ multiplicada a 2, será igual a -2.	

<table>
<tr>
<td>2.</td>
<td>

$$h(x) = \frac{1}{8}f(x) = \frac{1}{8}(x^2 + 2x) = \frac{x^2}{8} + \frac{2}{8}x$$

Cada ordenada dos pontos do gráfico de f são multiplicados pelo coeficiente $\frac{1}{8}$.
Assim sendo, as imagens de g correspondem às imagens de f multiplicadas a $\frac{1}{8}$.
Por exemplo, o ponto $(-1,-1)$ irá transformar-se no ponto $(-1,-\frac{1}{8})$ na função h, pois a imagem $-1 \in f$ multiplicada a $\frac{1}{8}$, será igual a $-\frac{1}{8}$.

<u>Possíveis dificuldades:</u>

Os alunos poderão não conseguir justificar.

$a)$

$i.$
$D_i = \mathbb{R}$

$D'_i = [-1;+\infty[$

Zeros: $\{-\frac{1}{2},0\}$

Extremos: mínimo absoluto: $\{-1\}$

$ii.\ D_j = \mathbb{R}$

$D'_j = [-1;+\infty[$

Zeros: $\{-4,0\}$

Extremos: mínimo absoluto: $\{-1\}$

<u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá não se recordar de como encontrar o valor dos zeros e dos extremos no Geogebra.
</td>
<td>

A professora remete o aluno para as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, questionando: “O que foi acontecendo aos pontos do gráfico de f? O que permitia transformar uma imagem de f numa imagem de g ou h?”

A professora relembra que a informação relativa a este aspeto encontra-se no guião dado na primeira aula.
</td>
</tr>
</table>

	b) Em relação à representação gráfica de i é possível constatar que ocorreu uma mudança no eixo das abcissas, alterando as abcissas do gráfico de f. e/ou A parábola ficou mais estreita. e/ou Ocorreu uma contração em relação ao eixo das abcissas. Ocorreu uma contração em relação ao eixo das abcissas. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir explicar o que é pedido. c)	Ou a professora poderá indicar quais os comandos que o aluno poderá utilizar. A professora questiona o aluno sobre as alterações que ocorreram, relativamente às abcissas e às ordenadas dos pontos do gráfico de f. "Será que ocorreu alteração no valor das abcissas dos pontos do gráfico? E no valor das ordenadas?"

	f	i	j
Coordenadas dos pontos do gráfico relativos aos zeros	$(-2,0)$ $(0,0)$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$ $(0,0)$	$(-4,0)$ $(0,0)$
Coordenadas dos pontos do gráfico relativos aos extremos	$(-1,-1)$	$(-\frac{1}{4},-1)$	$(-2,-1)$

<u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não entender como se deve construir a tabela. O aluno poderá indicar apenas os valores dos extremos e dos zeros, não indicando as coordenadas. i. Ao observar os zeros de f e i, é possível verificar que os zeros se alteram. Como ocorrem apenas transformações a nível do eixo das abcissas, os zeros irão sofrer alterações, relativamente aos zeros de f. Quanto aos extremos é possível observar que estes não se alteram, visto que os extremos estão diretamente relacionados com a ordenada do ponto correspondente ao extremo. O mínimo absoluto de i é -1, enquanto que na função f é também -1. O extremante será modificado: na função i corresponde a $-\frac{1}{4}$ e na função f é o -1. O extremante de f poderá ser multiplicado por $\frac{1}{4}$, de modo a obter o extremante de i. Ao observar os zeros de f e j, é possível verificar que os zeros se alteram. Como ocorrem apenas transformações ao nível do eixo das abcissas, os zeros irão sofrer alterações. Quanto aos extremos é possível observar que estes não se alteram, visto que os extremos estão diretamente relacionados com a ordenada do ponto correspondente ao extremo. O mínimo absoluto de i é -1, enquanto que na função f é também -1. O extremante será modificado: na função j corresponde a -2 e na função f é o -1. O extremante de j é obtido através do extremante de f multiplicado ao coeficiente 2. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não identificar todas as alterações.	 A professora exemplifica no quadro. A professora relembra o aluno que é necessário indicar as coordenadas. A professora chama a atenção para mais alterações que ocorrem, além das que o aluno já identificou.

		O aluno poderá não conseguir estabelecer relação entre os valores que diferem. $ii.$ $i(x) = f(4x) = (4x)^2 + 2(4x) = 16x^2 + 8x$ Para que não haja alteração no valor das imagens, em ambas as funções, todas as abcissas pertencentes aos pontos do gráfico de f serão multiplicadas pelo inverso da constante que é multiplicada pelos objetos na expressão analítica da função i. Por exemplo, o ponto $(-1, -1)$ irá transformar-se no ponto $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$ na função i, pois o objeto $-1 \in f$ multiplicada a $\frac{1}{4}$, será igual a $-\frac{1}{4}$. Logo $f\left(4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = f(-1)$. $j(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)x = \frac{x^2}{4} + x$ Para que não haja alteração no valor das imagens, em ambas as funções, todas as abcissas pertencentes aos pontos do gráfico de f serão multiplicadas pelo inverso da constante que é multiplicada pelos objetos na expressão analítica da função j. Por exemplo, o ponto $(-1, -1)$ irá transformar-se no ponto $(-2, -1)$ na função i, pois o objeto $-1 \in f$ multiplicada a 2, será igual a -2. Logo $f\left(\frac{1}{2} \times (-2)\right) = f(-1)$. <u>Possíveis dificuldades:</u> Os alunos poderão não conseguir justificar.	A professora questiona sobre a existência de uma relação entre os números que diferem com a constante que está a multiplicar em cada uma das expressões de g e h. Durante a discussão a professora terá especial atenção a esta questão, ajudando os alunos a refletir que no caso de contrações e dilatações horizontais, o domínio da função será alterado. A professora remete o aluno para as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, questionando: “O que foi acontecendo às imagens? O que permitia transformar uma imagem de f numa imagem de g ou h?”

		A professora poderá exemplicar com um caso particular.

- **Discussão e correção da Ficha de Trabalho n.º 3**

  A correção da questão 2 será feita oralmente procurando interpelar os alunos acerca da das conclusões dos mesmos. A professora procurará ainda ter em conta o trabalho que foi desenvolvido no software Geogebra

  Ao longo da discussão das ideias, a professora procurará focar-se em aspetos importantes de modo a que todos os alunos percebam o essencial relativamente à contração e dilatação. Desta forma, será importante realçar o que vai acontecendo aos valores da função $\boldsymbol{f}$ depois do gráfico desta ser transformada, e que os valores alteram-se segundo um coeficiente que multiplica as abcissas e as ordenadas do gráfico inicial. É ainda fundamental alertar o aluno para as representações gráficas e para a relação que estas têm com os coeficientes que transformam o gráfico de uma determinada função noutro.

- **Resolução da Ficha de Trabalho nº4**

  A resolução da ficha de trabalho nº4 irá ser realizada em grupo e de forma autónoma, sendo que a professora acompanhará o trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo da resolução. A professora, durante a resolução, privilegiará o raciocínio dos alunos, insistindo sempre que estes justifiquem as suas respostas. Ao mesmo tempo insistirá na linguagem corrente, procurando que estes justifiquem corretamente a relação entre a componente gráfica e algébrica, assim como todas as repostas dadas pelos mesmos.

  Esta ficha proporcionará ainda aos alunos a oportunidade de trabalharem com a calculadora gráfica, adquirida por estes no início do ano. Assim sendo, a professora orientará os alunos na utilização deste meio didático.

	<u>Atividade do aluno</u>	<u>Atividade da professora</u>
1.	**Proposta resolução:** b) Zeros: $\left\{0,\frac{5}{2}\right\}$ Coordenadas dos pontos do gráfico de f correspondente aos extremos: Ponto do gráfico de f relativo ao máximo relativo: (0,0)	A professora resolverá esta ficha juntamente com os alunos, recorrendo ao questionamento e esclarecendo dúvidas que vão surgindo. Como a calculadora gráfica irá ser necessária nesta altura, a professora trabalhará com esta ferramenta ao mesmo tempo que os alunos.

	Ponto do gráfico de f relativo ao mínimo relativo: $(1{,}67; -4{,}63)$ $c)$ $i.$ Coordenadas dos pontos do gráfico de j que correspondem aos zeros: $(0{,}0)\ (\frac{5}{2}; 0)$ Coordenadas dos pontos do gráfico de j relativos aos extremos: Ponto do gráfico de j que corresponde ao máximo relativo: $(0{,}0)$ Ponto do gráfico de j que corresponde ao mínimo relativo: $(1{,}67; -13{,}89)$ $ii.$ Coordenadas dos pontos do gráfico de z que correspondem aos zeros: $(0{,}0)\ e\ (\frac{5}{2}; 0)$ Coordenadas dos pontos do gráfico de z relativos aos extremos Ponto do gráfico de z que corresponde ao máximo relativo: $(0{,}0)$ Ponto do gráfico de z que corresponde ao mínimo relativo: $(1{,}67, -0{,}78)$ $iii)$ Coordenadas dos pontos do gráfico de w que correspondem aos zeros: $(0{,}0)\ (\frac{1}{2}; 0)$ Coordenadas dos pontos do gráfico de w relativos aos extremos Ponto do gráfico de w que corresponde ao máximo relativo: $(0{,}0)$	A professora chama a atenção, relembrando o aluno acerca do que foi trabalhado na aula passada. A professora questiona o aluno sobre o que aconteceu aos gráficos que foram transformados segunda a contração e dilatação horizontal.

	Ponto do gráfico de w que corresponde ao mínimo relativo : $(0{,}33; -4{,}63)$ $iv)$ Coordenadas dos pontos do gráfico de h que correspondem aos zeros: $(0{,}0)$ $(17{,}5; 0)$ Coordenadas dos pontos do gráfico de h relativos aos extremos Ponto do gráfico de h que corresponde ao máximo relativo: $(0{,}0)$ Ponto do gráfico de h que corresponde ao mínimo relativo: $(11{,}67; -4{,}63)$ $d)$ $i)$ Dilatação vertical de coeficiente 3 $ii)$ Contração vertical de coeficiente $\frac{1}{6}$ $iii)$ Contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{5}$ $iv)$ Dilatação horizontal de coeficiente 7 <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá confundir o coeficiente referente à contração e dilatação horizontal.	

Ao longo da discussão da tarefa realizada aos alunos a professora procurará focar-se em aspetos importantes de modo a que todos os alunos percebam o essencial relativamente à contração e dilatação. Desta forma, a professora terá de realçar o que vai acontecendo aos valores da função $\boldsymbol{f}$ depois de esta ser transformada, e que os valores se alteram segundo um coeficiente que multiplica os objetos ou as imagens. É ainda fundamental alertar o aluno para as representações gráficas e para a relação que estas têm com os coeficientes que transformam o gráfico de uma determinada função noutro.

- **Sistematização de ideias**

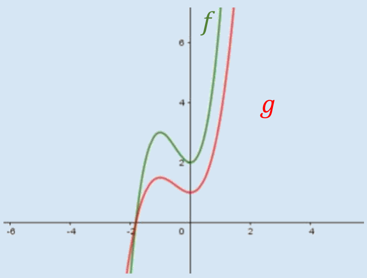
Após ter sido feita a resolução e correção da ficha de trabalho, a professora retomará, juntamente com os alunos, a sistematização do subtópico abordado na aula, a contração e dilatação vertical e horizontal. Este momento da aula terá como principal objetivo rever todos os tópicos que foram trabalhados pelos alunos ao longo da aula.

Nesta fase da aula, a professora deverá interpelar os alunos acerca das conclusões que estes chegaram durante a realização da ficha de trabalho, permitindo ao aluno sistematizar as diferentes alterações que vão ocorrendo ao gráfico da função que é transformado.

Durante a sistematização de ideias será apresentada pela professora os seguintes materiais, em formato powerpoint.

Contração e dilatação vertical

Exemplo 1: Consideremos a função $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2}$ e a função $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}\, f(x)}$.



- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$ $\boldsymbol{D_g} = \mathbb{R}$
- **Pontos do gráfico de f e g relativos aos zeros**

  $(\boldsymbol{-1,81; 0}) \in \boldsymbol{G_f}$ $(\boldsymbol{-1,81; 0}) \in \boldsymbol{G_g}$
- **Extremos:**

  $\boldsymbol{3} \in \boldsymbol{D'_f}$ $(\boldsymbol{-1, 3}) \in \boldsymbol{G_f}$

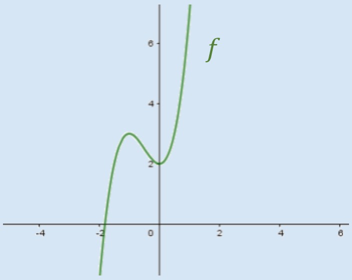
  $\boldsymbol{\frac{3}{2}} \in \boldsymbol{D'_g}$ $\left(\boldsymbol{-1, \frac{3}{2}}\right) \in \boldsymbol{G_g}$

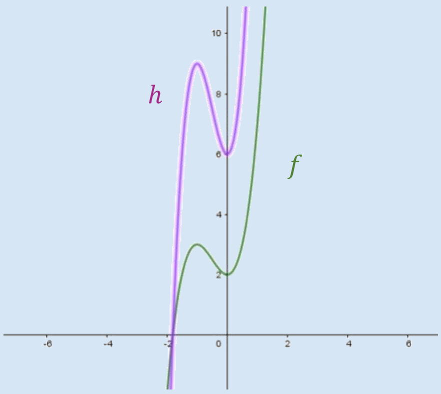
  $\boldsymbol{2} \in \boldsymbol{D'_f}$ $(\boldsymbol{0, 2}) \in \boldsymbol{G_f}$

  $\boldsymbol{1} \in \boldsymbol{D'_g}$ $(\boldsymbol{0, 1}) \in \boldsymbol{G_g}$
- A ordenada 3 é multiplicada pelo coeficiente $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$.
- A ordenada 2 é multiplicada pelo coeficiente $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$.

Os pontos $\left(-\mathbf{1}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ são imagens dos pontos $(-\mathbf{1}, \mathbf{3})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$, respetivamente, pela contração vertical de coeficiente $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ e pertencem ao gráfico de $\boldsymbol{g}$.

Exemplo 2: Seja $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.





- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$ $\boldsymbol{D_h} = \mathbb{R}$
- **Pontos do gráfico de $\boldsymbol{f}$ relativos aos zeros:**

  $(-\mathbf{1{,}81}; \mathbf{0}) \in \boldsymbol{G_f}$ $(-\mathbf{1{,}81}; \mathbf{0}) \in \boldsymbol{G_h}$

- **Extremos:**

  $-\mathbf{3} \in \boldsymbol{D'_f}$ $(-\mathbf{1}, \mathbf{3}) \in \boldsymbol{G_f}$

  $\mathbf{9} \in \boldsymbol{D'_h}$ $(-\mathbf{1}, \mathbf{9}) \in \boldsymbol{G_h}$

  $\mathbf{2} \in \boldsymbol{D'_f}$ $(\mathbf{0}, \mathbf{2}) \in \boldsymbol{G_f}$

  $\mathbf{6} \in \boldsymbol{D'_h}$ $(\mathbf{0}, \mathbf{6}) \in \boldsymbol{G_h}$

- A ordenada 3 é multiplicada pelo coeficiente $\mathbf{3}$.
- A ordenada 2 é multiplicada pelo coeficiente $\mathbf{3}$.

Os pontos $(-\mathbf{1}, \mathbf{9})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{6})$ são imagens dos pontos $(-\mathbf{1}, \mathbf{3})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$, respetivamente, pela dilatação vertical de coeficiente $\mathbf{3}$ e pertencem ao gráfico de $\boldsymbol{h}$.

Nota:
A cada ponto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pertencente a um plano munido de um referencial cartesiano, a transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano associa o ponto $\boldsymbol{P}$ ao ponto $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{ay})$ designa-se por contração vertical ($\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$) ou dilatação vertical ($\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$) (**Máximo**, $\mathbf{2017}$).

Definição:

Considerando um plano munido de um referencial cartesiano e uma função real de variável real $\boldsymbol{f}$ diz-se que o gráfico da função $\boldsymbol{g}$ definida em $\boldsymbol{D_g = D_f}$ por $\boldsymbol{g(x) = af(x)}$ é imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$:

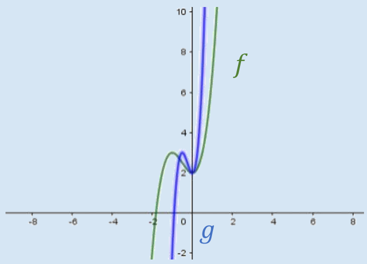
- Por uma contração vertical de coeficiente $\boldsymbol{a}$ se $\boldsymbol{0 < a < 1}$;

- Por uma dilatação vertical de coeficiente $\boldsymbol{a}$ se $\boldsymbol{a > 1}$.

Máximo (2017)

Contração e dilatação horizontal

Exemplo 1: Consideremos a função $\boldsymbol{g(x) = f(2x)}$



- $\boldsymbol{D_f = [-2, 2]}$ $\qquad$ $\boldsymbol{D_g = [-1, 1]}$
- **Pontos do gráfico de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ relativos aos zeros:**

  $\boldsymbol{(-1,81; 0) \in G_f}$ $\qquad$ $\boldsymbol{(-0,9; 0) \in G_g}$

  $\boldsymbol{(-1,81 \times \frac{1}{2} = -0,9)}$

- **Extremos:**

  $\boldsymbol{3 \in D'_f}$ $\qquad$ $\boldsymbol{(-1, 3) \in G_f}$

  $\boldsymbol{3 \in D'_g}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}, 3\right) \in G_g}$

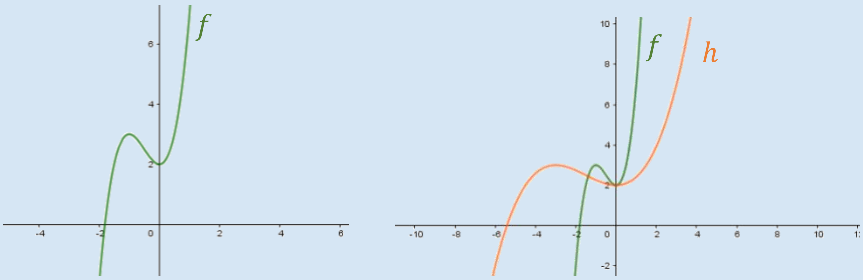
  $\boldsymbol{2 \in D'_f}$ $\qquad$ $\boldsymbol{(0, 2) \in G_f}$

  $\boldsymbol{2 \in D'_g}$ $\qquad$ $\boldsymbol{(0, 2) \in G_g}$

- A abcissa -1 é multiplicado pelo coeficiente $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$, inverso de 2.
- A abcissa 0 é multiplicado pelo coeficiente $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$, inverso de 2.

Os pontos $(-\frac{1}{2}, \mathbf{3})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$ são imagens dos pontos $(-\mathbf{1}, \mathbf{3})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$, respetivamente, pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ e pertencem ao gráfico de $\boldsymbol{g}$.

Exemplo 2: Consideremos a função $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\frac{1}{3}\boldsymbol{x})$



- $\boldsymbol{D_f} = [-\mathbf{2}, \mathbf{2}]$ $\boldsymbol{D_h} = [-\mathbf{6}, \mathbf{6}]$
- **Pontos do gráfico de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{h}$ relativos aos zeros:**

$(-\mathbf{1}, \mathbf{81}; \mathbf{0}) \in \boldsymbol{G_f}$ $(-\mathbf{5}, \mathbf{42}; \mathbf{0}) \in \boldsymbol{G_h}$

$(-\mathbf{1}, \mathbf{81} \times \mathbf{3} = -\mathbf{5}, \mathbf{42})$

- **Extremos:**

$\mathbf{3} \in \boldsymbol{D'_f}$ $(-\mathbf{1}, \mathbf{3}) \in \boldsymbol{G_f}$

$\mathbf{3} \in \boldsymbol{D'_h}$ $(-\mathbf{3}, \mathbf{3}) \in \boldsymbol{G_h}$

$\mathbf{2} \in \boldsymbol{D'_f}$ $(\mathbf{0}, \mathbf{2}) \in \boldsymbol{G_f}$

$\mathbf{2} \in \boldsymbol{D'_h}$ $(\mathbf{0}, \mathbf{2}) \in \boldsymbol{G_h}$

- A abcissa -1 é multiplicado pelo coeficiente $\mathbf{3}$, inverso de $\frac{1}{3}$.
- A abcissa 0 é multiplicado pelo coeficiente $\mathbf{3}$, inverso de $\frac{1}{3}$.

Os pontos $(-\mathbf{3}, \mathbf{3})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$ são imagens dos pontos $(-\mathbf{1}, \mathbf{3})$ e $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$, respetivamente, pela dilatação horizontal de coeficiente $\mathbf{3}$ e pertencem ao gráfico de $\boldsymbol{g}$.

Nota:
A cada ponto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pertencente a um plano munido de um referencial cartesiano, a transformação $\boldsymbol{\phi}$ do plano associa o ponto $\boldsymbol{P}$ ao ponto $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P'}(\boldsymbol{ax}, \boldsymbol{y})$ designa-se por contração horizontal de coeficiente $\boldsymbol{a}$ $(\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1})$ ou dilatação horizontal de coeficiente $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} > \mathbf{1})$ (Máxim ,2017)

Definição:

Considerando um plano munido de um referencial cartesiano e uma função real de variável real $\boldsymbol{f}$ diz-se que o gráfico da função $\boldsymbol{g}$ definida em $\boldsymbol{D_g} = \{\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}\}$ por $\boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{f(ax)}$ é imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$:

- Por uma **dilatação horizontal de coeficiente** $\boldsymbol{\frac{1}{a}}$ se $\boldsymbol{0 < a < 1}$;

- Por uma **contração horizontal de coeficiente** $\boldsymbol{\frac{1}{a}}$ se $\boldsymbol{a > 1}$.

Máximo (2017)

TPC: Ficha de trabalho

Avaliação

A avaliação desta aula será do tipo reguladora, na medida em que se irá centrar no questionamento que será feito aos alunos ao longo da aula e no feedback oral e escrito fornecido pela professora. O feedaback oral acontecerá durante o trabalho autónomo realizado pelos alunos durante a realização das tarefas propostas, enquanto que o feedback escrito realizar-se-á nas fichas de trabalho que os alunos irão realizar ao longo da aula, e que irão entregar no final da aula.

Tanto o feedback oral e o feedback escrito também permitirá aos alunos tomarem consciência das suas dificuldades e refletirem acerca das suas aprendizagens. A análise feita às resoluções terá como objetivo obter elementos acerca das aprendizagens e dificuldades apresentadas pelos alunos, permitindo à professora refletir sobre os aspetos a ter em conta nas aulas seguintes.

Anexo 3.4. – Planificação da 4.ª aula

U LISBOA | UNIVERSIDADE DE LISBOA

ie Instituto de Educação

Plano de Aula

Instituto de Ciências Educativas Dia 30 de Abril de 2018 Aula de Matemática A - 10º CTA	Sumário: Transformações geométricas de gráficos de funções: Reflexão Função par e ímpar Resolução de uma ficha de trabalho.

Tópicos

- Gráficos de funções obtidos por reflexão do eixo $\boldsymbol{O_x}$
- Gráficos de funções obtidos por reflexão do eixo $\boldsymbol{O_y}$
- Função par e função ímpar

Principais Objetivos

- Representar, o gráfico de uma função na calculadora gráfica;
- Reconhecer que um gráfico de uma função $\boldsymbol{g(x) = -f(x)}$, definido em $\boldsymbol{D_g = D_f}$, é imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela reflexão de eixo $\boldsymbol{O_x}$;
- Reconhecer que um gráfico de uma função $\boldsymbol{g(x) = f(-x)}$, definido em $\boldsymbol{D_g = \{-x : x \in D_f\}}$, é imagem do gráfico de $\boldsymbol{f}$ pela reflexão de eixo $\boldsymbol{O_y}$;
- Identificar uma função real de variável real $\boldsymbol{f}$ como sendo par se $\boldsymbol{\forall x \in D_f, -x \in D_f \; e \; f(-x) = f(x)}$;
- Identificar uma função real de variável real $\boldsymbol{f}$ com sendo ímpar se $\boldsymbol{\forall x \in D_f, -x \in D_f \; e \; f(-x) = -f(x)}$;
- Dado $\boldsymbol{f}$ ímpar, função real de variável real, justificar que se $\boldsymbol{0 \in D_f}$, então $\boldsymbol{f(0) = 0}$.
- Reconhecer que uma função é ímpar se e só se o respetivo gráfico cartesiano for simétrico relativamente à origem do referencial;
- Reconhecer que uma função é par se e só se o respetivo gráfico for simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.

Capacidades Transversais

- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática;
- Desenvolver a autonomia e o trabalho colaborativo;
- Desenvolver a capacidade argumentativa e o sentido critico.

Recursos

- Quadro
- Manual
- Software Geogebra
- Computador
- Ficha de trabalho nº 5 e nº 6
- Caderno
- Projetor
- Calculadora gráfica

Métodos de Trabalho a implementar na sala de aula

- Trabalho pares ou em grupo
- Grupo-Turma

Momentos da Aula	Duração
• **Sumário**	6 minutos
• **Ficha de trabalho nº 5**	
✓ Resolução da questão 1	10 minutos
✓ Correção e discussão da questão 1	10 minutos
✓ Resolução da questão 2	10 minutos
✓ Correção e discussão da questão 2	7 minutos
• **Ficha de Trabalho nº 6**	
✓ Resolução da questão 1	10 minutos
✓ Correção e discussão da questão 1	10 minutos
✓ Resolução da questão 2	10 minutos
✓ Correção e discussão da questão 2	7 minutos
• **Sistematização de ideias relacionadas com a reflexão**	10 minutos

Desenvolvimento da Aula

No início da aula, a professora recolherá o trabalho de casa que foi proposto aos alunos realizarem durante o fim de semana e entregará as resoluções das fichas de trabalho que foram realizadas durante a aula passada. Posteriormente, a professora irá relembrar o que foi trabalhado na aula passada, interpelando os alunos e questionando se estes têm alguma dúvida relativamente ao que já foi abordado até ao momento.

De seguida, os alunos, que já estão divididos pelos grupos de trabalho com que têm vindo a trabalhar desse o inicio das aulas relativas às transformações dos gráfico de funções, começarão a resolver a ficha de trabalho n.º 5. A resolução das tarefas propostas serão sempre feitas em grupo e de forma autónoma, tendo a professora um papel orientador durante este momento. A professora recordará aos alunos sobre a necessidade de criarem a pasta no Ambiente de Trabalho, onde mais tarde guardarão o ficheiro de Geogebra que irão utilizar. A professora ainda mencionará a importância da justificação dos cálculos e do raciocínio dos alunos ao longo da realização da ficha de trabalho.

A ficha de trabalho n.º 6 será trabalhada nos mesmos formatos que a ficha anterior, com a exceção da ferramenta tecnológica que será agora a calculadora gráfica.

- **Resolução da ficha de trabalho nº 5**

Enquanto os alunos resolvem a ficha de trabalho, a professora circulará pela sala para apoiar os alunos durante a realização da ficha e para esclarecer eventuais dúvidas que os alunos tenham, orientando os mesmos para o que é pedido em cada questão. Ao mesmo tempo será feita uma análise ao trabalho que cada grupo vai desenvolvendo, com o objetivo de ir tomando consciência do trabalho que os alunos vão desenvolvendo. Esta análise terá também como objetivo selecionar as ideias principais que podem ser, mais tarde, apresentadas durante a discussão e correção da ficha.

- **Discussão e correção da Ficha de Trabalho n.º 5**

  A correção da ficha será feita em três momentos, sendo que cada questão será discutida e resolvida logo a seguir a os alunos terminarem a sua resolução. A correção será feita através do questionamento que a professora fará a vários elementos da turma. Esta insistirá na justificação de todas as respostas dadas. Visto que as respostas às questões propostas são muito imediatas, a professora fará a correção oralmente recorrendo ao Geogebra sempre que necessário.

	<u>Atividade da professora</u>	<u>Atividade do aluno</u>
1.	**Proposta de resolução:** $a)\ D_f = \mathbb{R}$ $D'_{f=}\mathbb{R}$ $b)$ zeros: $\{0\}$ $c)$ $f(-5) = -250$ $f(-1) = -2$ $f(2) = 16$ $f(3) = 54$ $d)$ $ii.$ É possível verificar que o gráfico de f se refletiu/ “espelhou” relativamente ao eixo das ordenadas. Todas as abcissas dos pontos do gráfico de f passaram ao simétrico no gráfico transformado. <u>Possíveis dificuldades:</u> Os alunos revelam dificuldade em indicar as alterações, visto tratar-se	A professora realça que com o geogebra é possível, através da propriedade dos objetos,

de uma função cúbica e o gráfico da função transformada ser muito parecida com o gráfico da função original.

destacar o gráfico de uma função com um traço mais grosso.

$iii.$

x	$g(x)$
-3	54
-2	16
1	-2
5	-250

<u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá não conseguir calcular as imagens por meio da função g visto esta função ainda não estar definida analiticamente.

A professora relembra ao aluno as fermentas que este poderá utilizar com o geogebra para determinar os pontos do gráfico de uma determinada função.

$iv.$ Comparando os valores da alínea anterior com os encontrados na alínea c, é possível constatar que as imagens da função f e da função g mantém-se, mas para objetos diferentes. Os objetos de f e g simétricos correspondem a imagens iguais, por meio da função f e g, respetivamente.

<u>Possíveis dificuldades:</u>

Os alunos poderão não mencionar que os objetos simétricos de f e g, respetivamente irão obter imagens iguais.

A professora aconselha os alunos a observarem atentamente os valores obtidos anteriormente e identificarem os valores que são diferentes e os valores que são iguais.

$v.$ $g(x) = f(-x) = 2 \times (-x)^3 = -2x^3$

Os pontos do gráfico de f e os pontos do gráfico de g diferem pelo valor das abcissas relativas a estes pontos.

	As imagens da função f e da função g manter-se-ão iguais quando o valor do objeto correspondente a f é simétrico ao objeto de g. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno mostra dificuldades em justificar a expressão da função g.	A professora aconselha o aluno a começar por justificar através de exemplos e, mais tarde generalizar. A professora ainda pede ao aluno para comparar as representações gráficas obtidas.
	$e)$ $ii.$ O gráfico de h sofreu uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ e, de seguida, foi refletido segundo o eixo das ordenadas (eixo O_y). Ou vice-versa. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno mostra dificuldade em identificar as transformações ocorridas ao gráfico de f. e/ ou O aluno apenas refere a transformação de reflexão.	A professora questiona o aluno acerca dos conceitos trabalhados na aula anterior e que tipo de transformações poderão ocorrer. "Observando a representação gráfica que valores se alteraram?" E observando a expressão analítica serão as imagens ou os objetos a alterarem-se?"
2.	$a)$ $D_g = \mathbb{R}$ $D'_g = [-\frac{1}{4}; +\infty[$ zeros: $\{-1, 0\}$ Extremos: Mínimo absoluto e relativo: $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ $b)$ $i.$ $ii.$ $D_i = \mathbb{R}$	

$D'_i = [-\infty; \frac{1}{4}[$

zeros: $\{-1 \text{ e } 0\}$

Extremos:

Máximo absoluto e relativo: $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

$iii.$ É possível verificar que o contradomínio
da função g e i são diferentes.

e/ou

A ordenada do vértice da parábola no gráfico de g representa um mínimo absoluto, enquanto que no gráfico de i a ordenada do vértice corresponde a um máximo absoluto.

e/ou

Verificou-se uma reflexão relativamente ao eixo O_x.

$iv.$

x	$g(x)$
-5	20
-1	0
2	6
3	12

x	$i(x)$
-5	-20
-1	0

<table>
<tr><td></td><td><table><tr><td>2</td><td>-6</td></tr><tr><td>3</td><td>-12</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá não conseguir determinar as imagens por meio da função h visto esta função ainda não estar definida analiticamente.</td><td>A professora relembra ao aluno as ferramentas que este poderá utilizar com o geogebra para determinar os pontos do gráfico de uma determinada função.</td></tr>
<tr><td></td><td>v. As imagens por meio da função g e da função i são simétricas, mantendo-se os mesmos objetos. Por exemplo,
$g(3) = 12 \; e \; i(3) = -12$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá não se aperceber que as imagens no gráfico de i se tornam simétricas relativamente ao gráfico de i.</td><td>A professora remete o aluno para as duas tabelas construídas, questionando as semelhanças e diferenças que este encontra.</td></tr>
<tr><td></td><td>$vi. \quad i(x) = -g(x) = -(x^2 + x) = -x^2 - x.$

Como apenas as imagens de g se alteram na função i, passando ao simétrico. Então a expressão analítica da nova função será igual a $-g(x)$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno mostra dificuldades em justificar a expressão da função g.</td><td>A professora aconselha o aluno a começar por justificar através de exemplos e, mais tarde generalizar.
A professora ainda pede ao aluno para comparar as representações gráficas obtidas.</td></tr>
</table>

	$f)$ $ii.$ O gráfico de j sofreu uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{5}$ e, de seguida, sofreu uma reflexão relativamente ao eixo das abcissas. Ou vice-versa. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno mostra dificuldade em identificar as transformações ocorridas ao gráfico de g. e/ ou O aluno apenas refere a transformação de reflexão	A professora questiona o aluno acerca dos conceitos trabalhados na aula anterior e que tipo de transformações poderão ocorrer. "Observando a representação gráfica que valores se alteraram?" E observando a expressão analítica serão as imagens ou os objetos a alterarem-se?"

Ao longo da discussão da tarefa realizada aos alunos a professora procurará focar-se em aspetos importantes de modo a que todos os alunos percebam o essencial relativamente à reflexão. Desta forma, a professora terá de realçar o que vai acontecendo aos valores da função $\boldsymbol{f}$ depois do gráfico desta ser transformada, e que os valores se alteram. É ainda fundamental alertar o aluno para relacionar as representações gráficas e algébricas.

- **Sistematização de ideias sobre a reflexão**

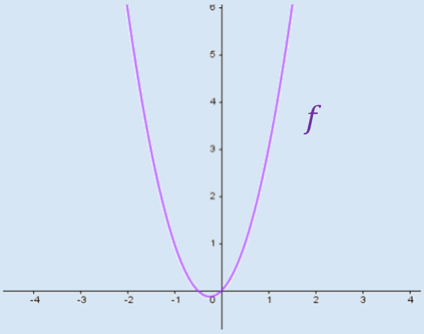
Após ter sido feita a resolução e correção da ficha de trabalho, a professora irá fazer, juntamente com os alunos, uma sistematização do subtópico abordado na aula, reflexão. Este momento da aula terá como principal objetivo rever todos os tópicos que foram trabalhados pelos alunos ao longo da aula.

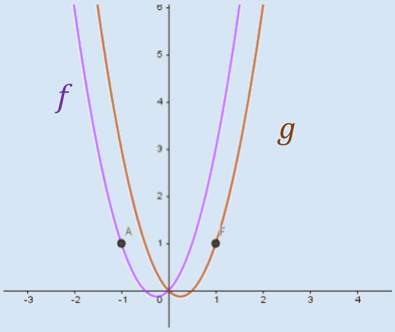
Nesta fase da aula, a professora deverá interpelar os alunos acerca das conclusões que estes chegaram durante a realização da ficha de trabalho, permitindo ao aluno sistematizar as diferentes alterações que vão ocorrendo ao gráfico da função que é transformado.

Durante a sistematização de ideias será apresentada pela professora os seguintes materiais, em formato powerpoint.

Reflexão

Exemplo 1:





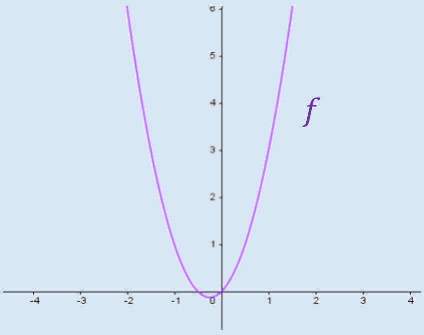
- $D_f = \mathbb{R} \quad D'_f = [-\frac{1}{8}; +\infty[$ $\qquad D_g = \mathbb{R} \quad D'_g = [-\frac{1}{8}; +\infty[$
- $-\frac{1}{4} \in D_f \quad \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) \in G_f \qquad \frac{1}{4} \in D_g \quad \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) \in G_g$
- $-1 \in D_f \quad (-1, 1) \in G_f \qquad 1 \in D_g \quad (1, 1) \in G_g$

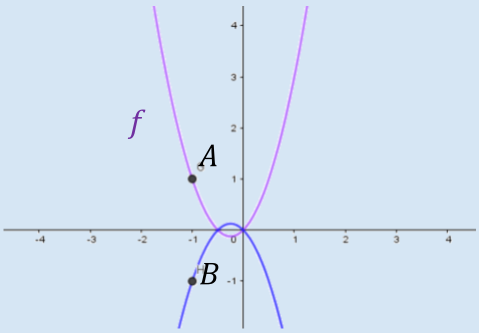
As imagens dos pontos $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ **e** $(-1, 1)$ do gráfico f, pela reflexão de eixo O_x são, respetivamente, os pontos $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ **e** $(1, 1)$ que pertencem ao gráfico de g.

Definição:

Dado um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico de f pela refelexão de eixo O_y. Máximo (2017)

Exemplo 2:





- $D_f = \mathbb{R} \quad D'_f = [-\frac{1}{8}; +\infty[$ $\qquad D_g = \mathbb{R} \quad D'_g = [\frac{1}{8}; -\infty[$

- $-\frac{1}{8} \in D'_f \quad \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) \in G_f \qquad \frac{1}{8} \in D'_g \quad \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) \in G_g$
- $1 \in D'_f \quad (-1, 1) \in G_f \qquad -1 \in D'_g \quad (-1, -1) \in G_g$

As imagens dos pontos $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ **e** $(-1, 1)$ do gráfico f, pela reflexão de eixo O_x são, respetivamente, os pontos $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ **e** $(-1, -1)$ que pertencem ao gráfico de g.

Definição:

Dado um plano munido de um referencial cartesiano, o gáfico de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo O_x. Máximo (2017)

- **Resolução da ficha de trabalho n.º 6**

  A resolução da ficha de trabalho nº6 irá ser realizada em grupo e de forma autónoma, sendo que a professora acompanhará o trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo da resolução da mesma. A professora, durante a resolução, privilegiará o raciocínio dos alunos, insistindo sempre que estes justifiquem as suas respostas. Ao mesmo tempo insistirá na linguagem corrente, procurando que estes justifiquem corretamente a relação entre a componente gráfica e algébrica, assim como todas as repostas dadas pelos mesmos. Esta ficha proporcionará ainda aos alunos a oportunidade de trabalharem com a calculadora gráfica, adquirida por estes no início do ano. Assim sendo, a professora orientará os alunos na utilização deste meio didático.

- **Discussão e correção da Ficha de Trabalho n.º 6**

  A correção da ficha será feita em dois momentos, sendo que cada questão será discutida e resolvida logo a seguir a os alunos terminarem a sua resolução. A correção será feita através do questionamento que a professora fará a vários elementos da turma. Esta insistirá na justificação de todas as respostas dadas e na forma como os alunos recorrem à calculadora gráfica. Visto que as respostas às questões propostas são muito imediatas, a professora fará a correção oralmente recorrendo ao quadro sempre que necessário.

	Atividade da professora	Atividade do aluno
1.	**Proposta de resolução:** b) mínimo absoluto e relativo: $\{1\}$	

	$D_f = \mathbb{R}$ $D'_f = [1; +\infty[$ $c)$ Se $x = 2, f(2) = 2^2 + 1 = 5$ Se $x = -2, f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$ Como existem dois objetos diferentes com a mesma imagem, por meio da função f, então f não é injetiva. <u>Possíveis dificuldades:</u>	
	O aluno não se recorda do que é uma função injetiva.	A professora questiona o aluno: " Uma função injetiva é uma função que tendo duas imagens diferentes, os objetos terão de ser o quê?" Caso esta dúvida seja geral, a professora fará uma breve revisão acerca da função injetiva.
	$d)$ É possível observar que o gráfico de g é simétrico ao gráfico de f relativamente ao eixo das abcissas. <u>Possíveis dificuldades:</u>	
	O aluno não consegue estabelecer relação ao que lhe é pedido.	A professora sugere ao aluno que verifique o que acontece ao gráfico de g em relação ao de f.
	$e)$ A função f e g irão obter as mesmas imagens mas com objetos simétricos, modificando-se o domínio. Ou seja, o $D_g = \{-x : x \in D_f\}$. <u>Possíveis dificuldades:</u>	
	O aluno não consegue justificar.	A professora questiona o aluno:" Qual será o valor de $f(2)$ e $g(-2)$? A professora poderá considerar outros valores do domínio.

2.	$a)$ $i.\ h\big(-(-3)\big) = 30$ $h(-(-1)) = 2$ $h(0) = 0$ $h(2) = -10$ $h(4) = -68$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não se recorda como pode obter o gráfico refletido segundo o eixo das abcissas.	 A professora questiona o aluno acerca dos dois gráficos obtidos, o de h e o de g: " Como é o gráfico de h? E de g?”. A professora ainda poderá questionar acerca das conclusões obtidas na alínea i.
	$ii.$ $i(x) = h(-x) = (-x)^3 - x$ Ao efetuar uma reflexão segundo o eixo das abcissas, o valor dos objetos da função f corresponderão aos objetos simétricos na função i, mantendo-se o valor das imagens. Assim sendo, a nossa expressão analítica terá apenas modificações no valor de x. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não consegue justificar.	 A professora questiona o aluno acerca da expressão da função quando o gráfico desta é obtido pela reflexão do eixo das abcissas: “ Quando o gráfico de h é refletido segundo o eixo das abcissas, o que se irá modificar na expressão analítica do gráfico resultante após essa transformação?”
	$b)$ $-h(-3) = 30$ $-h(-1) = 2$ $-h(0) = 0$ $-h(2) = -10$ $-h(4) = -68$	

	<u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não se recorda como pode obter o gráfico refletido segundo o eixo das ordenadas.	 A professora questiona acerca das mudanças que ocorrerão relativamente à expressão analítica do gráfico transformado.
	$ii.$ $j(x) = -h(x) = -(x^3 + x) = -x^3 - x.$ Como o gráfico da função j resulta da reflexão de h segundo o eixo das ordenadas então todas as imagens por meio de h irão alterar-se, sendo que a função j terá como imagens as imagens simétricas de f. <u>Possíveis dificuldades</u>: O aluno não consegue justificar.	A professora questiona o aluno acerca da expressão da função quando o gráfico desta é obtido pela reflexão do eixo das ordenadas: " Quando o gráfico de h é refletido segundo o eixo das ordenadas, o que se irá modificar na expressão analítica do gráfico resultante após essa transformação?"
	d) Da alínea b) $i(-1) = 2$ $j(-1) = 2$ $i(-3) = 30$ $j(-3) = 30$ $i(0) = 0$ $j(0) = 0$ $i(2) = -10$ $j(2) = -10$ $i(4) = -68$ $j(4) = -68$ Como $i(x) = h(-x)$ e $j(x) = -h(x)$ Então $h(-x) = -h(x)$. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir estabelecer relação com as alíneas anteriores.	A professora questiona acerca das mudanças que ocorrerão relativamente à expressão analítica do gráfico transformado. A professora sugere o aluno comparar os valores encontrados nas alíneas $2a)i.$ e na alínea $ii.$ da questão $2b$).

Ao longo da discussão e sistematização de ideias a professora fará uma relação com o que foi trabalhado anteriormente com a ficha acerca da reflexão e com as conclusões retiradas pelos alunos nesta ficha sobre a função par e a função ímpar.

- **Sistematização de ideias sobre a Função par e ímpar**

Função Par:

Uma função, $\boldsymbol{f}$, real de variável real é **par** se, $\forall\ \boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{D_f}, -\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{D_f} \wedge \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Ou seja, $\boldsymbol{f}$ é $\boldsymbol{uma\ função\ par} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}, -\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{D_f} \wedge \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Máximo (2017)

Se uma função é par, então o seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo $\boldsymbol{O_y}$.

Função Ímpar:

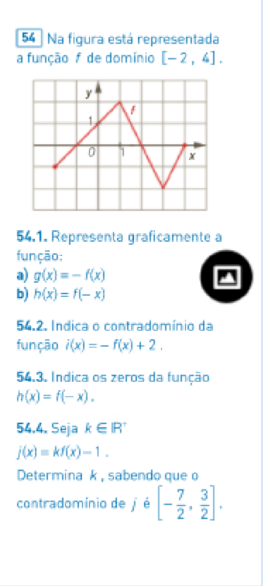
Uma função, $\boldsymbol{f}$, rela de variável real é ímpar se, para todo o $\boldsymbol{x}$ pertencente ao domínio de $\boldsymbol{f}$, $-\boldsymbol{x}$ também pertence ao domínio de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Ou seja, $\boldsymbol{f}$ é $\boldsymbol{uma\ função\ ímpar} \Leftrightarrow \forall\ \boldsymbol{x}\ \in\ \boldsymbol{D_f}, -\boldsymbol{x}\ \in \boldsymbol{D_f} \wedge \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Máximo (2017)

Se uma função é ímpar, a imagem do seu gráfico na reflexão cental de centro $\boldsymbol{O}$, sendo $\boldsymbol{O}$ a origem do referencial, é o próprio gráfico.

TPC Página 55 ex. 54


54 Na figura está representada a função f de domínio $[-2, 4]$.

54.1. Representa graficamente a função:

a) $g(x) = -f(x)$

b) $h(x) = f(-x)$

54.2. Indica o contradomínio da função $i(x) = -f(x) + 2$.

54.3. Indica os zeros da função $h(x) = f(-x)$.

54.4. Seja $k \in \mathbb{R}^+$

$j(x) = kf(x) - 1$.

Determina k, sabendo que o contradomínio de j é $\left[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Avaliação

A avaliação desta aula será do tipo reguladora, na medida em que se irá centrar no questionamento que será feito aos alunos ao longo da aula e no feedback oral e escrito fornecido pela professora. O feedaback oral acontecerá durante o trabalho autónomo realizado pelos alunos durante a realização das tarefas propostas, enquanto que o feedback escrito realizar-se-á nas fichas de trabalho que os alunos irão realizar ao longo da aula, e que irão entregar no final da aula.

Tanto o feedback oral e o feedback escrito também permitirá aos alunos tomarem consciência das suas dificuldades e refletirem acerca das suas aprendizagens. A análise feita às resoluções terá como objetivo obter elementos acerca das aprendizagens e dificuldades apresentadas pelos alunos, permitindo à professora refletir sobre os aspetos a ter em conta nas aulas seguintes.

Anexo 3.5. – Planificação da 5.ª aula

Plano de Aula

Instituto de Ciências Educativas Dia 3 de Maio de 2018 Aula de Matemática A - 10º CTA	**Sumário:** Continuação da aula anterior. Resolução de uma ficha de trabalho.

Tópicos

- Função par e ímpar

Principais Objetivos

- Identificar uma função real de variável real $\boldsymbol{f}$ como sendo par se $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}, -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$;
- Identificar uma função real de variável real $\boldsymbol{f}$ com sendo ímpar se $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}, -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$;
- Dado $\boldsymbol{f}$, função real de variável real, justificar que se $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{D_f}$, então $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.
- Reconhecer que uma função é ímpar se e só se o respetivo gráfico cartesiano for simétrico relativamente à origem do referencial;
- Reconhecer que uma função é par se e só se o respetivo gráfico for simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.

Capacidades Transversais

- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática;
- Desenvolver a autonomia e o trabalho colaborativo;
- Desenvolver a capacidade argumentativa e o sentido critico.

Recursos

- Quadro
- Manual
- Software Geogebra
- Computador
- Ficha de trabalho nº 6,7
- Caderno
- Projetor
- Calculadora gráfica

Métodos de Trabalho a implementar na sala de aula

- Trabalho pares ou em grupo
- Grupo-Turma

Momentos da Aula	Duração
• **Sumário**	5 minutos
• **Breve revisão da aula anterior**	5 minutos
• **Ficha de trabalho nº 6**	
✓ Resolução da questão 1, 2	20 minutos
✓ Correção e discussão da questão 1,2	10 minutos
• **Sistematização de ideias relacionadas com a função par e ímpar**	15 minutos
• **Ficha de trabalho nº 7**	35 minutos
✓ Resolução da questão ficha de trabalho	

Desenvolvimento da Aula

No início da aula, a professora recolherá o trabalho de casa que foi proposto aos alunos realizarem desde a última aula e, posteriormente será feita, logo a seguir ao sumário, uma breve revisão dos conteúdos trabalhados na aula passada, a fim de esclarecer algumas dúvidas ficaram pendentes.

De seguida, os alunos, que já estão divididos pelos grupos de trabalho com que têm vindo a trabalhar desde o início das aulas relativas às transformações dos gráficos de funções, começarão a resolver a ficha de trabalho n.º 6. A resolução das tarefas propostas serão sempre feitas em grupo e de forma autónoma, tendo a professora um papel orientador durante este momento.

A ficha de trabalho n.º 6 será trabalhada nos mesmos moldes que a ficha anterior, com a exceção da ferramenta tecnológica que será agora a calculadora gráfica.

- **Resolução da ficha de trabalho n.º 6**

  A resolução da ficha de trabalho nº6 irá será realizada em grupo e de forma autónoma, sendo que a professora acompanhará o trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo da resolução da mesma. A professora, durante a resolução, privilegiará o raciocínio dos alunos, insistindo sempre que estes justifiquem as suas respostas. Ao mesmo tempo insistirá na linguagem corrente, procurando que estes justifiquem corretamente a relação entre a componente gráfica e algébrica, assim como todas as repostas dadas pelos mesmos.

  Esta ficha proporcionará ainda aos alunos a oportunidade de trabalharem com a calculadora gráfica, adquirida por estes no início do ano. Assim sendo, a professora orientará os alunos na utilização deste recurso didático.

- **Discussão e correção da Ficha de Trabalho n.º 6**

  A correção da ficha será feita em dois momentos, sendo que cada questão será discutida e resolvida logo a seguir a os alunos terminarem a sua resolução. A correção será feita através do questionamento que a professora fará a vários elementos da turma. Esta insistirá na justificação de todas as respostas dadas e na explicitação de como alunos usaram a calculadora gráfica. Visto que as respostas às questões propostas são muito imediatas, a professora fará a correção oralmente recorrendo ao quadro sempre que necessário.

	Atividade da professora	Atividade do aluno
1.	Proposta de resolução: b) mínimo absoluto e relativo: $\{1\}$ $D_f = \mathbb{R}$ $D'_f = [1; +\infty[$ c) $Se\ x = 2, f(2) = 2^2 + 1 = 5$ $Se\ \ x = -2, f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$ Como existem dois objetos diferentes com a mesma imagem, por meio da função f, então f não é injetiva. Possíveis dificuldades: O aluno não se recorda do que é uma função injetiva.	 A professora questiona o aluno: "Uma função injetiva é uma função que tendo duas imagens diferentes, os objetos terão de ser o quê?" Caso esta dúvida seja geral, a professora fará uma breve revisão acerca da função injetiva.
	d) É possível observar que o gráfico de g "sobrepõe-se" ao gráfico de f e/ou É possível observar que o gráfico de g resulta da reflexão do gráfico e f segundo o eixo das ordenadas Possíveis dificuldades: O aluno não consegue estabelecer relação ao que lhe é pedido.	 A professora sugere ao aluno que verifique o que acontece ao gráfico de g em relação ao de f.

2.	e) O contradomínio da função f e g é igual, enquanto que o domínio será diferente. Os objetos pertencentes ao domínio de g corresponderão aos objetos simétricos do domínio de f. ou seja, o $D_g = \{-x: x \in D_f\}$. As imagens de f mantêm-se para objetos simétricos <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não consegue justificar.	 A professora questiona o aluno:" Qual será o valor de $f(2)$ e $g(-2)$? A professora poderá considerar outros valores do domínio.
	a) i. $-h(-3) = 30$ $-h((-1)) = 2$ $-h(0) = 0$ $-h(2) = -10$ $-h(4) = -68$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não se recorda como pode obter o gráfico refletido segundo o eixo das abcissas.	 A professora questiona como ficará o gráfico de h depois de estes ser refletido segundo o eixo das abcissas. A professora poderá ainda questionar sobre as alterações que ocorrem depois do gráfico de h ser transformado: "O que aconteceu ao gráfico de h depois de ter sido refletido? Que alterações verificas?"
	ii. $i(x) = -h(x) = -(x^3 + x)$ $= -x^3 - x$ Ao efetuar uma reflexão segundo o eixo das abcissas, o valor das ordenadas dos pontos irão corresponder às ordenadas simétricas dos pontos do gráfico de h Assim sendo, a expressão analítica da função h será multiplicada por	

	-1, obtendo-se assim a nova função i. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir obter a expressão analítica pedida.	 A professora questiona o aluno acerca da expressão da função quando o gráfico desta é obtido pela reflexão do eixo das abcissas: " Quando o gráfico de h é refletido segundo o eixo das abcissas, o que se irá modificar na expressão analítica da função cujo gráfico resulta desta transformação?"
	b) $h(-(-3)) = 30$ $h(-(-1)) = 2$ $h(0) = 0$ $h(-2)) = -10$ $h(-4) = -68$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não se recorda como pode obter a expressão analítica da função correspondente ao gráfico refletido segundo o eixo das ordenadas.	 A professora questiona acerca das mudanças que ocorrerão relativamente à expressão analítica do gráfico transformado.
	ii. $j(x) = h(-x) = (-x)^3 - x) = -x^3 - x.$ Como o gráfico da função j resulta da reflexão de h segundo o eixo das ordenadas então todas as abcissas dos pontos do gráfico de h passarão ao simétrico no novo gráfico. Assim sendo, haverá alterações nos objetos da função. <u>Possíveis dificuldades</u>: O aluno não consegue obter a expressão pedida.	 A professora questiona o aluno acerca da expressão da função quando o gráfico desta é obtido pela reflexão do eixo das ordenadas: " Quando o gráfico de h é refletido segundo o eixo

	c) Da alínea b) $i(-1) = 2$ $\quad$ $j(-1) = 2$ $i(-3) = 30$ $\quad$ $j(-3) = 30$ $i(0) = 0$ $\quad$ $j(0) = 0$ $i(2) = -10$ $\quad$ $j(2) = -10$ $i(4) = -68$ $\quad$ $j(4) = -68$ Como $i(x) = -h(x)\ e\ j(x) = h(-x)$ Então $h(-x) = -h(x)$. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir estabelecer relação com as alíneas anteriores.	das ordenadas, o que se irá modificar na expressão analítica da função h após essa transformação?” A professora questiona acerca das mudanças que ocorrerão relativamente à expressão analítica da função h depois do gráfico desta ter sido transformado. A professora sugere ao aluno comparar os valores encontrados nas alíneas 2a)i. e na alínea ii. da questão 2b).

Ao longo da discussão, a professora fará uma relação com o que foi trabalhado anteriormente com a ficha acerca da reflexão e com as conclusões retiradas pelos alunos nesta ficha sobre a função par e a função ímpar.

- **Sistematização de ideias sobre a Função par e ímpar**

Função Par:

Uma função, $\boldsymbol{f}$, real de variável real é par se, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}, -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f} \wedge \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

Ou seja, $\boldsymbol{f}$ é $\boldsymbol{uma\ função\ par} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}, -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f} \wedge \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

Máximo (2017)

Se uma função é par, então o seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo $\boldsymbol{O_y}$.

Função Ímpar:

Uma função, $\boldsymbol{f}$, rela de variável real é ímpar se, para todo o $\boldsymbol{x}$ pertencente ao domínio de $\boldsymbol{f}$, $-\boldsymbol{x}$ também pertence ao domínio de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Ou seja, $\boldsymbol{f}$ é $\boldsymbol{uma\ função\ ímpar} \Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}, -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f} \wedge \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Máximo (2017)

Se uma função é ímpar, a imagem do seu gráfico é o próprio gráfico.

- **Resolução/Correção da Ficha de Trabalho nº 7**

A resolução da ficha de trabalho nº 7 será realizada em grupo-turma, sendo que a professora acompanhará todo o processo de resolução. Durante a mesma, a professora priveligiará o raciocinio dos alunos, interpelando os mesmos.
Algumas das alíneas da questão n.º 2 serão feitas pelos alunos autonomamente. Visto esta questão ter ao todo qutro alíneas, algumas delas poderão ser feitas em grupo-turma e outras resolvidas pelos alunos. Desta forma, permite ao aluno trabalhar autonomamente, refletindo sobre as suas próprias dificuldades e aprendizagens.

	Atividade da professora	Atividade do aluno
1.	Proposta de resolução: $\boldsymbol{a})\ f(x) = 5x^3 + 2x, D_f = \mathbb{R}$ $f(-x) = 5(-x)^3 + 2(-x)$ $= -5x^3 - 2x$ $-f(x) = -(5x^3 + 2x)$ $= -5x^3 - 2x$ Ou seja, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$. A função f é ímpar. $\boldsymbol{b})\ f(x) = \sqrt{x^2+4}\quad D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 4 \geq 0\} = \mathbb{R}$ $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+4} = \sqrt{x^2+4}$ $-f(x) = -\left(\sqrt{x^2+4}\right)$ $= -\sqrt{x^2+4}$ Ou seja, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(x) = f(-x)$. A função f é par.	

	c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 -}, D_f = \mathbb{R}$ Se $x \in D_f, -x \in D_f$. $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 - (-x)}$ $= \sqrt[3]{-x^3 + x}$ $-f(x) = -\sqrt[3]{x^3 - x}$ $= \sqrt[3]{(-1)^3(x^3 - x)}$ $= \sqrt[3]{-x^3 + x}$ Ou seja, $\forall x \in D_{f,} - x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$. A função f é ímpar. ***d***) $f(x) = 2x^5 - 4x^3, D_f = \mathbb{R}$ $Se\ x \in D_f, -x \in D_f$ $f(-x) = 2(-x)^5 - 4(-x)^3$ $= -2x^5 + 4x^3$ $-f(x) = -(2x^5 - 4x^3)$ $= -2x^5 + 4x^3$ Ou seja, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$. A função f é ímpar. <u>Possíveis dificuldades</u>:	
	O aluno poderá revelar algumas dificuldades relativas às operações com radicais e potências.	A professora relembra alguns aspetos importantes relativamente aos radicais e potências, nomeadamente o sinal da potência quando esta tem um expoente negativo ou positivo.
	O aluno define o domínio sem ter atenção aos valores possíveis que um radical poderá ter.	A professora relembra que é preciso ter em conta que o que está dentro do radical de índice par precisa de ser positivo. A professora poderá recorrer a exemplos.
2.	***a***) $g(x) = -f(x) = -(2x - 3) = -2x + 3$.	

	O gráfico de g resulta do gráfico de f pela reflexão segundo o eixo das abcissas. Logo, o contradomínio será alterado. $$D'_g = [-7,3]$$ Assim, $$g: [0,5] \to [-7,3]$$ $$x \hookrightarrow -2x + 3$$ $$h(x) = f(-x) = 2(-x) - 3$$ $$= -2x - 3$$ O gráfico de h resulta do gráfico de f pela reflexão segundo o eixo das ordenadas. Logo, o domínio de h será alterado. $$D_h = [-5,0]$$ $$h: [-5,0] \to [-3,7]$$ $$x \hookrightarrow -2x - 3$$ <u>Possíveis dificuldades</u>: O aluno poderá não ter atenção ao domínio e contradomínio que são alterados quando o gráfico de uma função é refletido. ***b***) $f(2) + g(4) + h(-3)$ $$= 1 - 5 + 3 = -1$$	A professora questiona o aluno se apenas a expressão analítica altera: "Será que apenas a expressão analítica altera? O que acontece ao gráfico?"
3.	***a***) $D_f = \mathbb{R}$ Se $x \in D_f, -x \in D_f$ $$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3$$ $$= x^2 - x^3$$ $$-f(x) = -(x^2 + x^3) = -x^2 - x^3$$ Ou seja, $\exists x \in D_f: f(x) \neq f(-x) \wedge f(-x) \neq -f(x)$. ***b***)	

	$\boldsymbol{i}. D_g = \mathbb{R}$ Se $x \in \ _{g}, -x \in D_g$ $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f\big(-(-x)\big)}{2}$ $= \dfrac{f(-x) + f(x)}{2}$ $= \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ $= g(x)$ Ou seja, $\forall x \in D_g, -x \in D_g \wedge g(x) = g(-x)$ $\boldsymbol{ii}. D_{\boldsymbol{h}} = \mathbb{R}$ Se $x \in D_h, -x \in D_h$ $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f\big(-(-x)\big)}{2}$ $= \dfrac{f(-x) - f(x)}{2}$ $-h(x) = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ $= -\dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{f(-x)}{2}$ $= \dfrac{f(-x) - f(x)}{2}$ $= h(-x)$ Ou seja, $\forall x \in D_h, -x \in D_h \wedge h(-x) = -h(x)$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir concluir o que é pretendido.	A professora vai resolvendo no quadro, sugerindo que estes podem trocar parcelas, caso seja permitido pelas regras das operações.
4.	Para que f seja par, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$.	

	$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow -(-x)^2 + \frac{k}{2}(-x) + k = -x^2 + \frac{k}{2}x + k \Leftrightarrow -x^2 - \frac{k}{2}x = -x^2 + \frac{k}{2}x \Leftrightarrow -\frac{k}{2}x = \frac{k}{2}x \Leftrightarrow -\frac{k}{2} = \frac{k}{2} \Leftrightarrow -2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não utiliza a definição de função par para descobrir o valor de k.	A professora questiona o aluno sobre a definição de uma função par: “O que é uma função par? O que acontece aos objetos e imagens de uma função par?”

Avaliação

A avaliação desta aula será do tipo reguladora, na medida em que se irá centrar no questionamento que será feito aos alunos ao longo da aula e no feedback oral e escrito fornecido pela professora. O feedback oral acontecerá durante o trabalho autónomo realizado pelos alunos durante a realização das tarefas propostas, enquanto que o feedback escrito realizar-se-á nas fichas de trabalho que os alunos irão realizar ao longo da aula, e que irão entregar no final da aula.

Tanto o feedback oral e o feedback escrito também permitirá aos alunos tomarem consciência das suas dificuldades e refletirem acerca das suas aprendizagens. A análise feita às resoluções terá como objetivo obter elementos acerca das aprendizagens e dificuldades apresentadas pelos alunos, permitindo à professora refletir sobre os aspetos a ter em conta nas aulas seguintes.

Anexo 3.6. – Planificação da 6.ª aula

UNIVERSIDADE DE LISBOA

Instituto de Educação

Plano de Aula

Instituto de Ciências Educativas Dia 4 de Maio de 2018 Aula de Matemática A - 10º CTA	**Sumário:** Resolução de exercícios

Tópicos

- Reflexão
- Função par e ímpar

Principais Objetivos

- Consolidação e aplicação de conhecimentos em exercícios relativos sobre reflexão e as funções pares e ímpares.

Capacidades Transversais

- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática;
- Desenvolver a autonomia e o trabalho colaborativo;
- Desenvolver a capacidade argumentativa e o sentido critico.

Recursos

- Quadro
- Manual
- Calculadora gráfica
- Ficha de trabalho nº 7
- Caderno

Métodos de Trabalho a implementar na sala de aula

- Trabalho pares ou em grupo
- Grupo-Turma

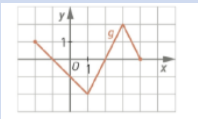
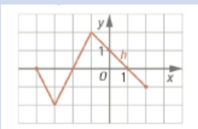
Momentos da Aula	Duração
• **Sumário**	5 minutos
• **Breve revisão da matéria lecionada**	5 minutos
• **Correção do trabalho de casa**	10 minutos
• **Ficha de trabalho nº 7**	25 minutos
✓ Resolução da questão ficha de trabalho	

Esta aula será dedicada inteiramente à resolução analítica de exercícios sobre a reflexão, a função par e ímpar. Primeiramente será feito um esquema, em turma, com todas as transformações trabalhadas nas últimas aulas, visto na aula passada a professora ter-se apercebido que ainda existem algumas dúvidas na relação entre a representação gráfica e a representação analítica.

Posteriormente, será corrigido o trabalho de casa proposto na aula do dia 3 de Maio. Como muitos alunos não entregaram este trabalho de casa à professora, na aula anterior, a professora fará a correção do mesmo no quadro.

Por fim, a ficha de trabalho n.º 7 será trabalhada em grupo turma, tendo a professora o papel de ir interpelando o aluno durante a resolução que será feita no quadro pela mesma.

- **Correção do trabalho de casa:** Manual Página 55 exercício 54

	<u>Atividade da professora</u>	<u>Atividade do aluno</u>
54. 54.1	Proposta de resolução: $\boldsymbol{a})$ O gráfico de g é imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo O_x. 	Ao longo da realização da ficha, a professora resolverá a mesma no quadro em conjunto com a turma, recorrendo ao questionamento oral.
	$\boldsymbol{b})$ O gráfico de h é imagem do gráfico de f pela reflexão segundo o eixo O_y. 	
54.2	O gráfico de i é imagem do gráfico de f pela reflexão segundo o eixo O_x e pela translação segundo o vetor $(0,2)$. Logo, $D'_i = [0,4]$	
54.3		

54.3	Zeros de h: $\{-1,2,4\}$ $D'_j = \{kf(x) - 1: x \in D_f\} = [-2k-1, 2k-1]$ Como $D'_j = \left[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right]$, então $\begin{cases} -2k - 1 = -\frac{7}{2} \\ 2k - 1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ k = \frac{5}{4} \right.$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir estabelecer relação entre o contradomínio de f e o contradomínio de j.	A professora começa por relembrar o contradomínio de f e questiona o que poderá acontecer aos valores deste quando se multiplica k. De seguida, interpela a turma sobre o que poderá acontecer quando se adiciona uma unidade ao que foi efetuado anteriormente; " Se o meu contradomínio de f é $[-2,2]$, o que acontece quando se multiplica a $f(x)$ a constante k? E de seguida adicionamos uma unidade ao que obtemos anteriormente."

- **Resolução/Correção da Ficha de Trabalho nº 7**

A resolução da ficha de trabalho nº 7 será realizada em grupo-turma, sendo que a professora acompanhará todo o processo de resolução. Durante a mesma, a professora priveligiará o raciocinio dos alunos, interpelando os mesmos.

Algumas das alíneas da questão n.º 1 serão feitas pelos alunos autonomamente. Visto esta questão ter ao todo quatro alíneas, algumas delas poderão ser feitas em grupo-turma e outras resolvidas pelos alunos. Desta forma, permite ao aluno trabalhar autonomamente, refletindo sobre as suas próprias dificuldades e aprendizagens.

	<u>Atividade da professora</u>	<u>Atividade do aluno</u>
1.	Proposta de resolução: $\boldsymbol{a})\ f(x) = 5x^3 + 2x, D_f = \mathbb{R}$	

	$f(-x) = 5(-x)^3 + 2(-)$ $= -5x^3 - 2x$ $-f(x) = -(5x^3 + 2x)$ $= -5x^3 - 2x$ Ou seja, $\forall x \in D_{f,} - x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$. A função f é ímpar. ***b***) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 4 \geq 0\} = \mathbb{R}$ $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 4} = \sqrt{x^2+4}$ $-f(x) = -\left(\sqrt{x^2+4}\right)$ $= -\sqrt{x^2+4}$ Ou seja, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(x) = f(-x)$. A função f é par. ***c***) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}, D_f = \mathbb{R}$ Se $x \in D_f, -x \in D_f$. $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 - (-x)}$ $= \sqrt[3]{-x^3 + x}$ $-f(x) = -\sqrt[3]{x^3 - x}$ $= \sqrt[3]{(-1)^3(x^3 - x)}$ $= \sqrt[3]{-x^3 + x}$ Ou seja, $\forall x \in D_{f,} - x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$. A função f é ímpar. ***d***) $f(x) = 2x^5 - 4x^3, D_f = \mathbb{R}$ $Se\ x \in D_f, -x \in D_f$ $f(-x) = 2(-x)^5 - 4(-x)^3$ $= -2x^5 + 4x^3$	Ao longo da realização da ficha, a professora resolverá a mesma no quadro em conjunto com a turma, recorrendo ao questionamento oral. Em algumas alíneas, a professora poderá sugerir aos alunos representarem algumas das funções na calculadora gráfica, de modo a que estes vão verificando o que vai ocorrendo aos diferentes gráficos de funções pares e/ou ímpares.

2.	$-f(x) = -(2x^5 - 4x^3)$ $= -2x^5 + 4x^3$ Ou seja, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$. A função f é ímpar. <u>Possíveis dificuldades</u>: O aluno poderá revelar algumas dificuldades relativas às operações com radicais e potências. O aluno define o domínio sem ter atenção aos valores possíveis que um radical poderá ter. ***a***) $g(x) = -f(x) = -(2x - 3) = -2x + 3$. O gráfico de g resulta do gráfico de f pela reflexão segundo o eixo das abcissas. Logo, o contradomínio será alterado. $D'_g = [-7,3]$ Assim, $g: [0,5] \to [-7,3]$ $x \hookrightarrow -2x + 3$ $h(x) = f(-x) = 2(-x) - 3$ $= -2x - 3$ O gráfico de h resulta do gráfico de f pela reflexão segundo o eixo das ordenadas. Logo, o domínio de h será alterado. $D_h = [-5,0]$ $h: [-5,0] \to [-3,7]$ $x \hookrightarrow -2x - 3$	A professora relembra alguns aspetos importantes relativamente aos radicais e potências, nomeadamente o sinal da potência quando esta tem um expoente negativo ou positivo. A professora relembra que é preciso ter em conta que o que está dentro do radical de índice par precisa de ser positivo. A professora poderá recorrer a exemplos. A professora questiona o aluno se apenas a expressão analítica altera: "Será que apenas a expressão analítica altera? O que acontece ao gráfico?"

3.	Possíveis dificuldades: O aluno poderá não ter atenção ao domínio e contradomínio que são alterados quando o gráfico de uma função é refletido. $\boldsymbol{b}$) $f(2) + g(4) + h(-3)$ $= 1 - 5 + 3 = -1$ $\boldsymbol{a}$) $D_f = \mathbb{R}$ Se $x \in D_f, -x \in D_f$ $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3$ $= x^2 - x^3$ $-f(x) = -(x^2 + x^3) = -x^2 - x^3$ Ou seja, $\exists x \in D_f: f(x) \neq f(-x) \wedge f(-x) \neq -f(x)$. $\boldsymbol{b}$) $\boldsymbol{i}$. $D_g = \mathbb{R}$ Se $x \in D_{g,} - x \in D_g$ $g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2}$ $= \frac{f(-x) + f(x)}{2}$ $= \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ $= g(x)$ Ou seja, $\forall x \in D_g, -x \in D_g \wedge g(x) = g(-x)$ $\boldsymbol{ii}$. $D_{\boldsymbol{h}} = \mathbb{R}$ Se $x \in D_h, -x \in D_h$ $h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2}$ $= \frac{f(-x) - f(x)}{2}$	

4.	$-h(x) = -\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ $= -\frac{f(x)}{2} + \frac{f(-x)}{2}$ $= \frac{f(-x)-f(x)}{2}$ $= h(-x)$ Ou seja, $\forall x \in D_h, -x \in D_h \wedge h(-x) = -h(x)$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno poderá não conseguir concluir o que é pretendido. Para que f seja par, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$. $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow -(-x)^2 + \frac{k}{2}(-x) + k$ $= -x^2 + \frac{k}{2}x + k$ $\Leftrightarrow -x^2 - \frac{k}{2}x$ $= -x^2 + \frac{k}{2}x$ $\Leftrightarrow -\frac{k}{2}x = \frac{k}{2}x$ $\Leftrightarrow -\frac{k}{2} = \frac{k}{2}$ $\Leftrightarrow -2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não utiliza a definição de função par para descobrir o valor de k.	A professora vai resolvendo no quadro, sugerindo que estes podem trocar parcelas, caso seja permitido pelas regras das operações. A professora questiona o aluno sobre a definição de uma função par: “O que é uma função par? O que acontece aos objetos e imagens de uma função par?”

Avaliação

A avaliação desta aula será do tipo reguladora, na medida em que se irá centrar no questionamento que será feito aos alunos ao longo da aula durante a resolução da ficha de trabalho que será realizada.

Anexo 3.7. – Planificação da 7.ª aula

U LISBOA | UNIVERSIDADE DE LISBOA

ie Instituto de Educação

Plano de Aula

Instituto de Ciências Educativas Dia 7 de Maio de 2018 Aula de Matemática A - 10º CTA	**Sumário:** Correção do trabalho de casa. Resolução de exercícios.

Tópicos

- Translação vertical e horizontal
- Contração de dilatação vertical e horizontal
- Reflexão
- Função par e ímpar

Principais Objetivos

- Consolidação dos conteúdos trabalhados na temática “transformações geométricas de gráficos de funções”;
- Aplicação de conhecimentos em exercícios relativos às várias transformações geométricas de gráficos de funções: translação vertical e horizontal, contração e dilatação vertical e horizontal, reflexão.
- Aplicação de conhecimentos em exercícios relativos à função par e ímpar.

Capacidades Transversais

- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática;
- Desenvolver a autonomia e o trabalho colaborativo;
- Desenvolver a capacidade argumentativa e o sentido critico.

Recursos

- Quadro
- Manual
- Caderno
- Calculadora gráfica

Métodos de Trabalho a implementar na sala de aula

- Trabalho pares
- Grupo-Turma

Momentos da Aula	Duração
• **Sumário**	5 minutos
• **Correção do trabalho de casa**	15 minutos
• **Resolução de exercícios:**	
✓ Manual página 53 exercício 53	10 minutos
✓ Manual página 60 exercício 27	20 minutos
✓ Manual página 61 exercício 61	20 minutos
• **Revisões**	20 minutos
✓ Esclarecimento de dúvidas	

Primeiramente, será feita a correção do trabalho de casa dado na aula passada, que engloba os exercícios da ficha n.º7 que não foram resolvidos.

Nesta aula serão feitos exercícios relativos às transformações geométricas de gráficos de funções abordados nas últimas duas aulas. Estes serão feitos em grupo-turma e a pares. O O exercício 53 será realizado pela professora em conjunto com a turma, serão realizados pela professora no quadro em conjunto com a turma. Contudo a professora recorrerá ao questionamento oral, privilegiado sempre a participação dos alunos. Os restantes exercícios serão feitos de forma autónoma e corrigidos pela professora no quadro quando a maioria dos alunos tiver terminado. Ao longo deste trabalho autónomo, a professora circulará pela sala, a fim de ajudar e orientar os alunos no caso destes apresentarem dificuldades. Ao mesmo tempo, a professora vai alertando os alunos para aspetos que ainda não estão bem consolidados e que esta identificou aquando do feedback escrito que foi dando nas resoluções dos alunos.

	<u>Atividade da professora</u>	<u>Atividade do aluno</u>
3.	**Proposta de resolução:** $\boldsymbol{a}$) $D_f = \mathbb{R}$ Se $x \in D_f, -x \in D_f$ $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3$ $= x^2 - x^3$ $-f(x) = -(x^2 + x^3) = -x^2 - x^3$ Ou seja, $\exists x \in D_f \colon f(x) \neq f(-x) \wedge f(-x) \neq -f(x)$. $\boldsymbol{b}$) $\boldsymbol{i}. D_g = \mathbb{R}$ Se $x \in D_{g,} - x \in D_g$ $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f\big(-(-x)\big)}{2}$ $= \dfrac{f(-x) + f(x)}{2}$ $= \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ $= g(x)$ Ou seja, $\forall x \in D_g, -x \in D_g \wedge g(x) = g(-x)$	

	$\boldsymbol{ii}.\ D_{\boldsymbol{h}} = \mathbb{R}$ Se $x \in D_h, -x \in D_h$ $h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2}$ $-h(x) = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\frac{f(x)}{2} + \frac{f(-x)}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = h(-x)$ Ou seja, $\forall x \in D_h, -x \in D_h \wedge h(-x) = -h(x)$ Possíveis dificuldades: O aluno poderá não conseguir concluir o que é pretendido.	
4.	Para que f seja par, $\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$. $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow -(-x)^2 + \frac{k}{2}(-x) + k = -x^2 + \frac{k}{2}x + k \Leftrightarrow -x^2 - \frac{k}{2}x = -x^2 + \frac{k}{2}x \Leftrightarrow -\frac{k}{2}x = \frac{k}{2}x \Leftrightarrow -\frac{k}{2} = \frac{k}{2} \Leftrightarrow -2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$ Possíveis dificuldades:	

	O aluno não utiliza a definição de função par para descobrir o valor de k.	A professora questiona o aluno sobre a definição de uma função par: “O que é uma função par? O que acontece aos objetos e imagens de uma função par?”

- **Resolução do exercício 53 da página 53**

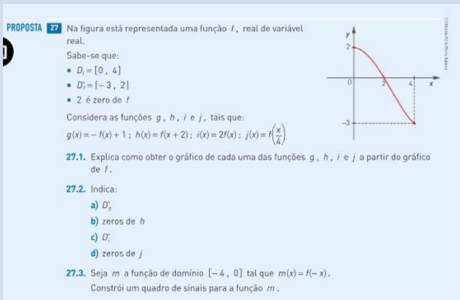
O presente exercício será resolvido em conjunto com a turma, sendo a resolução feita pela professora no quadro. Esta, ao longo da realização do mesmo, procurará interpelar os alunos de modo a que sejam estes a fornecer as respostas.

	<u>Atividade da professora</u>	<u>Atividade do aluno</u>
53. 53.1.	Proposta de resolução: $\boldsymbol{a})$ Contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{4}$. $\boldsymbol{b})$ Contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$. $\boldsymbol{c})$ Dilatação vertical de coeficiente 4. $\boldsymbol{d})$ Dilatação vertical de coeficiente 3. <u>Possíveis dificuldades:</u> Os alunos poderão confundir a contração e a dilatação, não associando o coeficiente ao inverso do valor que está a multiplicar os valores do domínio de f.	Ao longo da realização da ficha, a professora resolverá a mesma no quadro em conjunto com a turma, recorrendo ao questionamento oral. A professora questiona os alunos acerca do coeficiente de uma contração ou dilatação horizontal: “Quando estamos perante uma contração ou dilatação horizontal, qual é o valor do coeficiente que estamos a considerar?” A professora pode ainda fazer referência ao gráfico de uma função quando é contraída ou dilatada, questionando os alunos acerca das abcissas dos pontos: “Quando um gráfico é contraído/dilatado horizontalmente o que acontece às abcissas do gráfico?”

53.2	***a***) Os zeros de g: $g(x)=0 \Leftrightarrow f(4x)=0 \Leftrightarrow 4x=\frac{3}{2} \vee 4x=4 \Leftrightarrow x=\frac{3}{8} \vee x=1$ Logo, zeros de g: $\left\{\frac{3}{8},1\right\}$ ***b***) Os zeros de h: $h(x)=0 \Leftrightarrow f(3x)=0 \Leftrightarrow 3x=\frac{3}{2} \vee 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=\frac{4}{3}$ Os alunos poderão logo multiplicar cada zero de cada função pelo coeficiente da transformação associada a g e h.	

- **Resolução/Correção do exercício 27 da página 60 e do exercício 32 da página 61**

Estes exercícios serão resolvidos a pares e de forma autónoma por parte dos alunos. A professora circulará pela sala de modo a poder identificar as dificuldades que os alunos apresentem, orientando-os para o que é pedido. Ao mesmo tempo, também dará feedback oral sobre o trabalho que estes vão desenvolvendo.
A correção será feita no quadro por um dos alunos que será escolhido pela professora durante o trabalho autonomo que os alunos vão desenvolvendo.



PROPOSTA 27 Na figura está representada uma função f, real de variável real.

Sabe-se que:

- $D_f=[0,4]$
- $D'_f=[-3,2]$
- 2 é zero de f

Considera as funções g, h, i e j, tais que:

$g(x)=-f(x)+1$; $h(x)=f(x+2)$; $i(x)=2f(x)$; $j(x)=f\left(\frac{x}{4}\right)$

27.1. Explica como obter o gráfico de cada uma das funções g, h, i e j a partir do gráfico de f.

27.2. Indica:

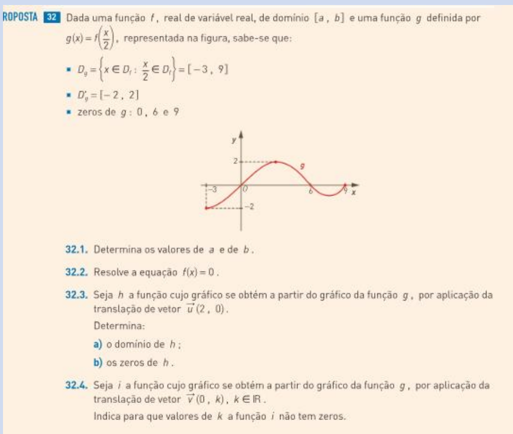
a) D'_g

b) zeros de h

c) D'_i

d) zeros de j

27.3. Seja m a função de domínio $[-4,0]$ tal que $m(x)=f(-x)$.
Constrói um quadro de sinais para a função m.



ROPOSTA 32 Dada uma função f, real de variável real, de domínio $[a,b]$ e uma função g definida por $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$, representada na figura, sabe-se que:

- $D_g=\left\{x \in D_f : \frac{x}{2} \in D_f\right\}=[-3,9]$
- $D'_g=[-2,2]$
- zeros de g: 0, 6 e 9

32.1. Determina os valores de a e de b.

32.2. Resolve a equação $f(x)=0$.

32.3. Seja h a função cujo gráfico se obtém a partir do gráfico da função g, por aplicação da translação de vetor $\vec{u}(2,0)$.
Determina:

a) o domínio de h;

b) os zeros de h.

32.4. Seja i a função cujo gráfico se obtém a partir do gráfico da função g, por aplicação da translação de vetor $\vec{v}(0,k)$, $k \in \mathbb{R}$.
Indica para que valores de k a função i não tem zeros.

	Atividade da professora	Atividade do aluno
27. 27.1. 27.2	**Proposta de resolução:** ***a***) O gráfico de g é obtido do gráfico de f pela reflexão segundo o eixo O_x seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(0,1)$. O gráfico de h pode ser obtido a partir do gráfico de f através da translação de vetor $\vec{u}(-2,0)$. O gráfico de i pode ser obtido através do gráfico de f através da dilatação vertical de coeficiente 2. O gráfico de j pode ser obtido através da dilatação horizontal de coeficiente 4. ***a***) Se $D'_f = [-3,2]$, então $-3 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2 \leq -f(x) \leq 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 \leq -f(x) + 1 \leq 4$ $D'_g = [-2+1, 3+1] = [-1,4]$. ***b***) zeros de h: $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x+2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$. Zero de h: $\{0\}$ ***c***) Se $D'_f = [-3,2]$, então $-3 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -6 \leq 2f(x) \leq 4$ $D'_i = [-3 \times 2, 2 \times 2] = [-6,4]$. ***d***) zeros de j:	A professora estará a circular pela sala com o intuito de ajudar os alunos com as suas dificuldades, fornecendo feedback oral perante o trabalho que estes desenvolvem. A professora, nesta alínea, fazer referência às transformações que ocorrem aos pontos do gráfico de f depois de este ser dilatado verticalmente segundo o coeficiente 2.

<table>
<tr><td>27.3</td><td>

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 8$$

Zeros de j: $\{8\}$

Como $D_f = [0,4]$, então $D_m = [-4,0]$.

Zeros de m: $f(-x) = 0 \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$

x	-4		-2		0
$m(x)$	-3	$-$	0	$+$	2

</td><td></td></tr>
<tr><td>32.
32.1</td><td>

a) $D_g = \left\{x \in D_f : \frac{x}{2} \in D_f\right\} = \left\{x \in D_f : \frac{x}{2} \in [a,b]\right\}$.

Logo, $\frac{x}{2} \in [a,b]$, $\frac{x}{2} = a \wedge \frac{x}{2} = b \Leftrightarrow x = 2a \wedge x = 2b$.

Ou seja, $[2a, 2b] = [-3,9] \Leftrightarrow 2a = -3 \wedge 2b = 9 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} \wedge b = \frac{9}{2}$.

<u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá não conseguir determinar o domínio de f.

</td><td>A professora sugere que o aluno identifique a transformação ocorrida ao gráfico de f e que, de seguida, reflita sobre o que acontece ao domínio da função correspondente o gráfico transformado.</td></tr>
<tr><td>32.2</td><td>

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 2x = 6 \vee 2x = 9 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = 0.$$

<u>Possíveis dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldade em perceber que $f(x) = g(2x)$.

</td><td>A professora questiona o aluno sobre a transformação que ocorre do gráfico de g para o</td></tr>
</table>

		gráfico de f: "Que transformação permite obter gráfico de f a partir do gráfico de g?"
32.3	***a***) Como $D_g = [-3,9]$ e $h(x) = g(x-2)$, então $D_h = [-3+2, 9+2] = [-1, 11]$. <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno considera que havendo uma translação segundo o vetor considerado, a expressão analítica correspondente seja $h(x) = g(x+2)$. ***b***) Zeros de h: $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 8 \vee x = 11.$ Zeros de h: $\{2,8,11\}$	A professora sugere que o aluno considere um ponto e verifique a situação considerada.
32.4	Como $D'_g = [-2,2]$ e $i(x) = g(x) + k$, então $D'_i = [-2+k, 2+k]$. A função i não tem zeros se $-2+k > 0 \vee 2+k < 0 \Leftrightarrow k > 2 \vee k < -2$. $k \in]-\infty, -2[\cup]2; +\infty[$ <u>Possíveis dificuldades:</u> O aluno não consegue encontrar um k que resolva a situação dada.	A professora questiona o aluno acerca do que tem de acontecer ao gráfico de g para que este não intersecte o eixo das abcissas: "O que será que tem de acontecer para que o gráfico de g não intersete o eixo das abcissas? Quantas unidades são necessárias adicionar ou subtrair para que o gráfico de g não intersete o eixo O_x?"

Avaliação

A avaliação desta aula será do tipo reguladora, na medida em que se irá centrar no questionamento que será feito aos alunos ao longo da aula durante a resolução dos exercícios propostos. A avaliação desta aula também contemplará o feedback oral que será realizado enquanto os alunos resolvem os exercícios. Este feedback permitirá o aluno tomar consciência das suas dificuldades e das aprendizagens alcançadas. Ao mesmo tempo a professora também terá oportunidade de identificar as dificuldades que os alunos apresentam, a fim de os poder ajudar e orientar durante a resolução dos exercícios.

Anexo 4 - Ficha de Avaliação

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Ficha de Avaliação nº4

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias Duração: 45 minutos

Nome: ____ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Grupo I

Em cada um dos itens seguintes seleciona a única opção correta.
Apresenta todos os cálculos e justificações.

1. Seja f, função real de variável real, definida por $f(x) = x^3$. Ao gráfico de f é efetuada uma translação horizontal segundo o vetor $\vec{u}(5,0)$, originando uma nova função g. Qual é a expressão analítica da função g?

   (A) $(x+5)^3$ (**B**) x^3+5

   (C) $(x-5)^3$ **(D)** x^3-5

2. Seja f, função real de variável real, e $P(2,5) \in G_f$. Considera o gráfico de h que resulta do gráfico de f pela contração vertical de coeficiente 6. Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de h?

   (A) $(2,15)$ **(B)** $(2,30)$

   (C) $(12,5)$ **(D)** $\left(2,\frac{5}{6}\right)$

3. Considera a função de domínio $[-5,8]$. Qual o domínio da função f, definida por $f(x) = g(7x)$?

(A) $\left[-\frac{5}{7}, \frac{8}{7}\right]$

(B) $[-35,56]$

(C) $[-5,56]$

(D) $[-35,8]$

Grupo II

Nos itens deste grupo, justifica todas as tuas respostas, apresentando todos os cálculos que efetuares.

1. Sejam, f e g, as funções reais de variável real, tal que $g(x) = f(\frac{1}{5}x)$.

   Indica a transformação que permite obter o gráfico de g a partir do gráfico de f.

2. Considera a função f definida por:

$$G_f = \{(-2,0), (-1,3), (0,1), (1,-1), (2,0)\}$$

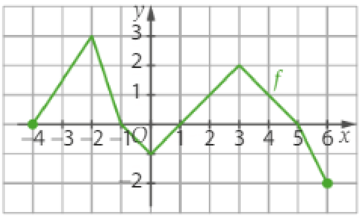
   Seja:

$$g: \{-4,-2,0,2,4\} \to \mathbb{R}$$
$$x \hookrightarrow -2f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

   Determina o G_g.

3. Na seguinte figura encontra-se representada graficamente a função f.

   Considera as funções g e h, definidas por $g(x) = f(4x)$ e $h(x) = 4f(x)$.



3.1.Indica o(s) zero(s), o domínio e o contradomínio de g e h.

3.2.Indica quantas soluções têm as equações $g(x) = 3$ e $h(x) = -4$.

4. Sejam, i e j, funções reais de variável real, par e ímpar respetivamente. Sabendo que $i(5) = -3$ e $j(-6) = 4$, determina o valor da seguinte expressão:

$$8i(-5) + 5j(6)$$

5. Averigua se, f, a função de domínio $\mathbb{R}\{0\}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$, é par ou ímpar.

Bom trabalho!

Anexo 5 - Guião do Geogebra

INSTITUTO DE
CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de gráficos de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias | Ficha informativa

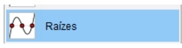
Nome: ____ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Guião Geogebra

O Geogebra é um software de matemática dinâmica que engloba muitas áreas da matemática, tais como, as funções e a geometria. Durante as nossas aulas, iremos utilizar o Geogebra para estudar certos tipos de funções, utilizando também alguns conceitos da geometria já estudados.

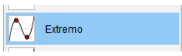
Este guião apresenta algumas ferramentas e funcionalidades que o Geogebra oferece, e que irão ser utilizadas ao longo das próximas aulas.

<u>Definir uma função</u>: Basta escreveres no comando "Entrada" a função que queres definir.

<u>Calcular zeros</u>: Clica no ícone , de seguida na opção 

e, por fim, seleciona a função da qual pretendes determinar os zeros.

<u>Determinar extremos</u>: Efetua os passos anteriores, selecionando a opção



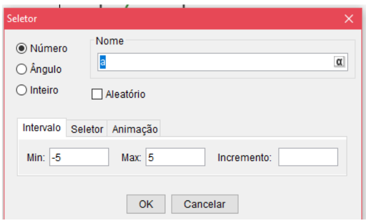
.

<u>Representar vetores</u>: Para desenhares um vetor no referencial poderás selecionar o seguinte ícone  e de seguida desenhar sobre o referencial o vetor. Logo de seguida, aparecerá na folha algébrica as coordenadas do vetor que desenhaste.

Também poderás definir no comando da "Entrada" as coordenadas do vetor e automaticamente o Geogebra desenha-o na folha gráfica.

<u>Efetuar uma isometria</u>: No seguinte ícone  tens acesso a várias isometrias que estudaste anteriormente. Seleciona a isometria pretendida e, de seguida, os elementos que estão entre parêntesis pela ordem indicada.

Criar um seletor: Um seletor permite-te criar uma variável para poderes considerar uma multiplicidade de valores e observar várias situações consoante o valor que o seletor tomar. Para tal, basta selecionares o seguinte ícone  e clicares, de seguida, sobre a folha gráfica. Irá aparecer-te uma janela onde poderás atribuir um nome ao seletor e definir entre que valores o seletor criado poderá variar.



Propriedades dos Objetos: Ao clicares com o botão direito do rato sobre um objeto, tanto na folha algébrica como na folha gráfica, terás acesso às *Propriedades dos Objetos"*. Esta opção permite-te aplicar certas especificidades aos objetos, tais como mudar de cor, mudar de nome, etc.

Anexo 6 - Entrevista

Anexo 6.1. – Entrevista

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de gráficos de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias — Entrevista

Nome: ______________________________ Nº ________ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções –Entrevista

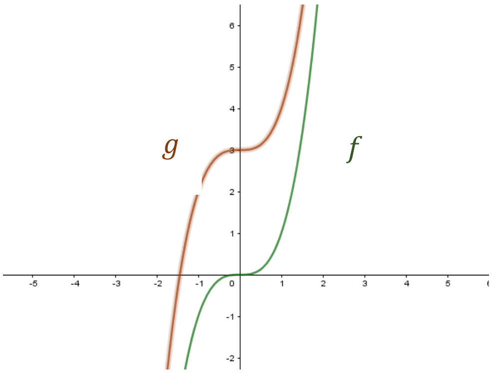
Resolve as seguintes questões recorrendo à calculadora gráfica sempre que te for solicitado. Justifica sempre todas as tuas respostas.

4. Considera a função $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x$, definida em $\mathbb{R}$. Supõe que o gráfico da função f é deslocado duas unidades para a direita.
   Que transformação ocorreu ao gráfico de f? Indica, justificando, a expressão analítica da função correspondente ao gráfico transformado.

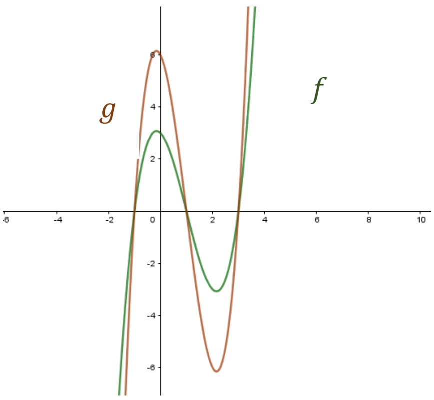
   Representa as duas funções, f e g, na calculadora gráfica e indica as alterações ocorreram ao gráfico da função f depois de ser transformado.

5. Considera a função f e g representadas graficamente. A função f é definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$ e o gráfico da função g é obtido através do gráfico da função f por

meio de uma transformação. A figura inclui a representação gráfica das funções f e g.O gráfico de g interseta o eixo das ordenadas no ponto $(0,3)$. Indica, justificando, a expressão analítica da função g.



6. Supõe agora que a função f é definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. O gráfico de g obtém-se através do gráfico de f por meio de uma transformação. A figura seguinte contém uma representação gráfica das funções f e g. O gráfico de f e o gráfico de g intersetam o eixo das ordenadas no ponto $(0,3)$ e $(0,5)$, respetivamente.
Que transformação ocorreu ao gráfico de f? Indica, justificando, a expressão analítica de g.



4. Indica, justificando, as diferentes transformações que ocorreram ao gráfico de f, de modo a obter o gráfico das funções consideradas em cada uma das alíneas seguintes:

$a)\ g(x) = f(x+3) + 4$

$b)\ h(x) = \frac{1}{2} f(x)$

$c)\ i(x) = f(5x) - 4$

$d)\ j(x) = -f(\frac{1}{4}x)$

Em termos gráficos o que ocorre ao gráfico da função f, depois de sofrer as diferentes transformações?

Adaptado de Anabousy, Daher & Baya'a (2014)

Anexo 6.2. – Guião de Entrevista

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS

Ano letivo 2017 - 2018

Matemática A

Transformações geométricas de gráficos de funções

10º Ano – Curso de Ciências e Tecnologias | Entrevista

Nome: ______________________________________ Nº _______ *Professores:* Valter Carlos/ Marisa Rosa

Propriedades geométricas de gráficos de funções –Matriz da Entrevista

Resolve as seguintes questões recorrendo à calculadora gráfica sempre que te for solicitado. Justifica sempre todas as tuas respostas.

7. Considera a função $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x$. Supõe que o gráfico da função f é deslocado duas unidades para a direita.
Que transformação ocorreu ao gráfico de f? Indica, justificando, a expressão analítica da função correspondente ao gráfico transformado.

Objetivo:

- Indica que o gráfico de f sofre uma translação horizontal de vetor $(2,0)$.
- O aluno consegue relacionar a expressão analítica com o gráfico da função transformada.
- O aluno consegue perceber que, através da comparação de dois pontos do gráfico de f e do gráfico de g, as ordenadas vão se manter para objetos iguais.
- O aluno consegue explicar através de um exemplo que considerando um ponto do gráfico de f e um ponto do gráfico de g, a expressão analítica é dada de uma determinada forma. Por exemplo, o ponto $(2,8) \in G_f$ e o ponto $(4,8) \in G_g$satisfaz a condição $g(x) = f(x-2)$.

Questões adicionais:

- ✓ Como é que pensaste?
- ✓ Porque é que o vetor $\vec{u}(2,0)$ é o vetor associado?
- ✓ O que te leva a afirmar que a expressão da função, resultante do gráfico transformado, é $f(x-2)$?
- ✓ Caso o aluno não indique o vetor ou não indique corretamente:
    - ➢ Quando se efetua uma translação, temos de associá-la sempre a um vetor. Só assim é possível efetuar uma translação. Que vetor é esse que está associado a esta translação?
- ✓ Caso o aluno não indique corretamente a expressão analítica, afirmando que é $f(x+2)$ ou $f(x)+2$:
    - ➢ Utiliza a calculadora e representa a função $f(x+2)$ ou $f(x)+2$. Será que vais obter a translação do gráfico da função f segundo o vetor $\vec{u}(2,0)$?

Representa as duas funções, f e g, na calculadora gráfica e indica as alterações ocorreram ao gráfico da função f depois de ser transformado.

Objetivo:

- ✓ O aluno afirma que o gráfico não se altera.
- ✓ O gráfico move-se todo para a direita.
- ✓ Os zeros da função são alterados.
- ✓ Apesar da deslocação efetuada, o domínio mantém-se.

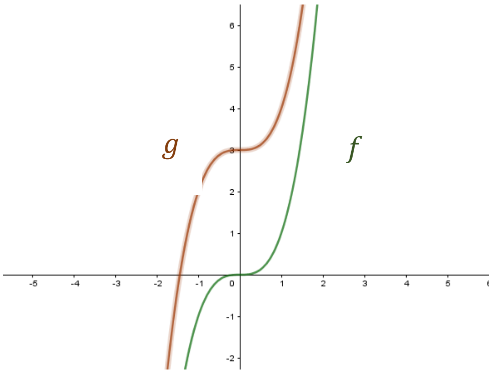
Questões adicionais:

- ✓ Considera que o domínio da tua função é $[-2,3]$. Qual é o domínio da função g?

Objetivo:

- ✓ O aluno consegue perceber que sendo o domínio limitado, este irá alterar-se depois do gráfico da respetiva função ser transformado. Neste caso, o domínio passa a ser [0,5].

8. Considera a função f e g representadas graficamente. A função f é definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$ e o gráfico da função g é obtido através do gráfico da função f por meio de uma transformação. A figura inclui a representação gráfica das funções f e g.O gráfico de g interseta o eixo das ordenadas no ponto $(0,3)$. Indica, justificando, a expressão analítica da função g.



Objetivos:

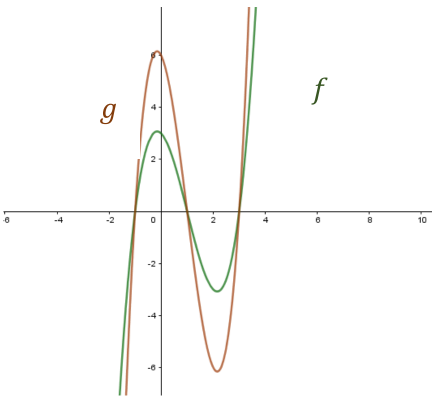
- O aluno consegue explicar que a todas as ordenadas dos pontos do gráfico de g são adicionadas a três unidades, recorrendo a um exemplo ($(2,8) \in G_f$ passa ao ponto $(2,11) \in G_g$).
- Identificar a expressão analítica da função g, explicando através do exemplo dado anteriormente que o mesmo satisfaz a igualdade $g(x) = f(x) + 3$.
- Relaciona a expressão analítica da função g com o respetivo gráfico.

Questões adicionais:

- ✓ Como é que pensaste?
- ✓ Porque é que a expressão de $g(x) = f(x) + 3$? (Caso o aluno não explique)
- ✓ Que transformação ocorreu ao gráfico de f?
  - ➢ Objetivo:
    - a) O aluno afirma que ocorre uma translação vertical segundo o vetor $(0,3)$.
- ✓ Que alterações ocorreram ao gráfico da função f depois de ser transformado?
  - ➢ Objetivo:

a) O aluno consegue ver que o gráfico se desloca três unidades para cima.
b) O aluno afirma que apesar de o gráfico ser deslocado na vertical, o seu contradomínio não se altera.
c) O aluno percebe que os zeros da função se alteram.

9. Supõe agora que a função f é definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. O gráfico de g obtém-se através do gráfico de f por meio de uma transformação. A figura seguinte contém uma representação gráfica das funções f e g. O gráfico de f e o gráfico de g intersetam o eixo das ordenadas no ponto $(0,3)$ e $(0,5)$, respetivamente.
Que transformação ocorreu ao gráfico de f? Indica, justificando, a expressão analítica de g.



<u>Objetivos:</u>

- Relaciona a expressão analítica de g com o respetivo gráfico.
- O aluno identifica que ocorreu uma dilatação vertical.
- O aluno consegue calcular o coeficiente que transforma, por meio de uma dilatação vertical, o gráfico de f no gráfico de g.
- O aluno consegue perceber que comparando os dois pontos, $(0,3) e$ $(0,5)$, que as ordenadas se modificam. O ponto $(0,5)$ é obtido do ponto $(0,3)$, multiplicando o mesmo pelo coeficiente $\frac{5}{3}$.
- Indicar a expressão analítica de g. Como as ordenadas dos pontos do gráfico de g são obtidas através da multiplicação das ordenadas dos pontos do

gráfico de f por $\frac{5}{3}$, então as imagens de f serão afetadas. Logo, $g(x) = \frac{5}{3}f(x)$.

Questões adicionais:

- ✓ Como é que pensaste?
- ✓ Que transformação ocorreu ao gráfico de f?
- ✓ Caso o aluno não determine o coeficiente ou não determine corretamente:
  - ➢ Experimenta comparar dois pontos, um do gráfico de f e outro do gráfico de g, para calculares o coeficiente associado.
- ✓ Que alterações ocorreram ao gráfico de f depois de ser transformado?
  - ➢ Objetivo:
  - a) O aluno afirma que o gráfico foi "esticado"/dilatado verticalmente.
  - b) O aluno afirma que ocorreram mudanças nas ordenadas dos pontos do gráfico da função transformada.
  - c) O aluno afirma que os extremos relativos alteraram-se.

5. Indica, justificando, as diferentes transformações que ocorreram ao gráfico de f, de modo a obter o gráfico das funções consideradas em cada uma das alíneas seguintes:

$\boldsymbol{a)}$ $\boldsymbol{g(x) = f(x+3)+4}$

$\boldsymbol{b)}$ $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{2}f(x)}$

$\boldsymbol{c)}$ $\boldsymbol{i(x) = f(5x)-4}$

$\boldsymbol{d)}$ $\boldsymbol{j(x) = -f(\frac{1}{4}x)}$

Objetivos:

- Identificar as diferentes transformações que ocorrem ao gráfico de f.
- Identificar os vetores/coeficientes associados a cada uma das transformações.

Orientações:

- ✓ Como é que pensaste?
- ✓ Caso o aluno não identifique corretamente a transformação e o vetor ou coeficiente associado, a professora sugere ao aluno considerar a função $f(x) = x^3 + 2x$ e representar as funções de cada uma das alíneas na calculadora gráfica.

Em termos gráficos o que ocorre ao gráfico da função f, depois de sofrer as diferentes transformações?

<u>Objetivo:</u>

- ✓ Associar a expressão de cada alínea à sua representação gráfica.
- ✓ Conseguir explicar a relação entre a representação algébrica e a representação gráfica.

Adaptado de Anabousy, Daher & Baya'a (2014)

Anexo 7 - Autorizações

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EDUCATIVAS
CRESCEMOS JUNTOS

Caro(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Marisa Martins Rosa, encontro-me a realizar a prática de ensino supervisionada no ICE, sob a orientação do Dr. Valter Carlos, no âmbito do mestrado em ensino da Matemática, da responsabilidade da Universidade de Lisboa. Nesse âmbito proponho-me realizar um estudo a partir do trabalho que irei desenvolver com a turma, numa unidade didática do programa de matemática, e que irá integrar o meu relatório final de curso. Para tal necessitarei de proceder à recolha de alguns elementos a partir dos documentos produzidos pelos alunos na aula e do registo em vídeo e áudio das aulas, os quais se destinam apenas à realização deste trabalho académico. A participação neste estudo não acarretará qualquer inconveniente para os alunos, será garantindo o anonimato quer dos alunos quer da escola e que a Direção do ICE já deu a sua autorização para a realização deste estudo.

Para a concretização deste trabalho será essencial a participação voluntária dos alunos, pelo que solicito o seu consentimento para a participação do seu educando, preenchendo, assinando e encaminhando o formulário em anexo para o Dr. Valter Carlos, professor de matemática da turma.

Adicionalmente, a turma do(a) seu(sua) educando(a) foi convidada a participar no projeto EDUCATE do programa europeu ERASMUS+, cuja informação envio também em anexo e, para a qual, solicito a sua melhor atenção e concordância.

Agradeço antecipadamente a sua colaboração e a do(a) seu(sua) educando(a).
Com os meus melhores cumprimentos.

, ___ de ____________ de 2017

A Mestranda em Ensino da Matemática,

____

(Marisa Martins Rosa)

Autorização

Eu, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ___________________________________, n.º ____, da turma ___, tomei conhecimento do estudo a realizar pela estagiária Marisa Rosa na disciplina de Matemática, ___________________________ (autorizo/ não autorizo) a participação do(a) meu(minha) educando(a), com a garantia de respeito pela sua privacidade e pelo seu anonimato.

Relativamente à gravação de imagens das aulas, apenas para análise neste estudo, _________________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando a sua privacidade e o seu anonimato.

_____ de __________ de 2017

O(A) Encarregado(a) de Educação

____

__

Nota: Solicito a devolução desta página ao Dr. Valter Carlos, professor de Matemática da turma, devendo a primeira página ficar consigo.